

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 14 aprile 1912.

P. BLASERNA Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla definizione di probabilità.* Nota del
Corrisp. G. PEANO.

La definizione comunemente adottata è « la probabilità di un avvenimento è il rapporto del numero dei casi favorevoli all'avvenimento, al numero dei casi possibili », e si suole aggiungere, o subito, o dopo una pagina, « a condizione che questi ultimi siano egualmente possibili ».

Invece di dire, col Bertrand, che i casi si suppongono egualmente *possibili*, dicono alcuni, col Poincaré, che i casi sono egualmente *verosimili*, o col Borel, egualmente *probabili*.

Questa definizione, che definisce la *probabilità* mediante il *probabile*, contiene un circolo vizioso evidente. Il circolo vizioso è più nascosto, ma rimane, se al posto di *probabile* usiamo un sinonimo: *possibile* o *verosimile*; poichè al posto di *probabilità* potremmo dire *possibilità* o *verosimiglianza*.

Il circolo vizioso è riconosciuto da parecchi autori. Il Poincaré dice: « La définition complète de la probabilité est donc une sorte de petition de principe. Une définition mathématique ici n'est pas possible ». E il Borel dice: « Cette définition renferme en apparence un cercle vicieux », e afferma impossibile il dare una definizione di probabilità senza servirci del linguaggio ordinario.

Io mi propongo di dimostrare che è possibile la definizione simbolica di probabilità, cioè che si può formare un'eguaglianza il cui primo membro è la probabilità che si vuol definire, ed il secondo membro è un gruppo di simboli precedentemente definiti, seguendo il mio *Formulari o Mathematico*, editio V.

DEFINIZIONE.

$$a, b \in \text{Cls. Num } a \in N_1. \cap . P(b, a) = \text{Num}(ab) / \text{Num } a$$

che letteralmente si legge: « Se a e b sono classi, e il numero degli individui della classe a è finito, allora il nuovo simbolo $P(b, a)$ vale il numero degli a che sono b , diviso pel numero totale degli a ».

Accostandoci alla definizione comune, possiamo leggere la definizione simbolica come segue: « Se a è la classe dei casi possibili, che si suppongono in numero finito, e b è la classe dei casi favorevoli, col simbolo $P(b, a)$, che si legge: probabilità dell'avvenimento b fra gli avvenimenti a , si intende il rapporto fra il numero dei casi possibili, che sono favorevoli, al numero totale dei casi possibili ».

I simboli matematici sono spesso suscettibili di più interpretazioni. La definizione simbolica che precede, si può anche leggere:

« Se a è una lega, b è il metallo fino, o oro, allora $P(b, a)$, che conviene di leggere: titolo della lega, si intende il rapporto fra il numero dei grammi d'oro che sonvi nella lega, al peso totale della lega ».

I teoremi fondamentali sulle probabilità assumono forma semplicissima, come pure le loro dimostrazioni.

PROBABILITÀ TOTALE.

$$a, b, c \in \text{Cls. Num } a \in N_1. a \cap b \cap c = A. \cap . P(b \cup c, a) = P(b, a) + P(c, a).$$

« Se a, b, c sono classi, se il numero degli a è finito, e se non esistono a che siano ad un tempo b e c , allora la probabilità che si presenti un caso b o un caso c fra i casi a , è la somma delle probabilità [che si presenti b fra gli a , ovvero si presenti c fra gli a ».

Dimostrazione. — Dalla logica si ha $a(b \cup c) = ab \cup ac$, e dall'aritmetica, teoria della numerazione, si deduce $\text{Num}(ab \cup ac) = \text{Num } ab + \text{Num } ac$. Divido per $\text{Num } a$; dalla definizione di P , si ha il teorema.

PROBABILITÀ COMPOSTA.

$$a, b, c \in \text{Cls. Num } a \in N_1. \cap . P(b \cap c, a) = P(b, a) \times P(c, a \cap b).$$

« Nelle stesse ipotesi, la probabilità che si presentino ad un tempo gli avvenimenti b e c fra gli a , cioè che il caso a abbia ad un tempo le qualità b e c , è il prodotto della probabilità che si presenti b fra gli a , per la probabilità di c fra gli a che sono b ».

È una forma, scritta col segno P , dell'identità aritmetica:

$$\frac{\text{Num}(abc)}{\text{Num } a} = \frac{\text{Num}(ab)}{\text{Num } a} \times \frac{\text{Num}(ac)}{\text{Num}(ab)}.$$

CONCLUSIONE.

Il simbolo $P(b, a)$ che si definisce, è funzione di due classi variabili a e b . È lecito leggerlo « probabilità dell'avvenimento d'un caso b fra i casi a » ovvero « percentuale dei b fra gli a », o altrimenti, purchè sempre si enuncino le due variabili a e b .

La frase comune « probabilità d'un avvenimento », si presenta come una funzione d'una sola variabile, dell'avvenimento; e dato l'avvenimento, non risultano determinate le classi dei casi possibili e favorevoli.

La questione « qual è la probabilità che domani piova » non ha senso, perchè non sono enunciate le due classi a e b da cui dipende la probabilità. Vi si può rispondere completando la frase ellittica, per esempio così: « la pluviosità in questo mese, o stagione, o in tutto l'anno, cioè il rapporto fra il numero dei giorni di pioggia e il numero totale dei giorni nel mese, o stagione, o anno, è tanta ».

La frase « probabilità di un avvenimento » è una frase incompleta; e considerandola come completa, assoluta, si incontrano le difficoltà; basta completarla, coll'enunciare le due classi variabili, per eliminare ogni difficoltà. È una frase simile alle:

il punto a è fisso (senza dire rispetto a chi);

il numero a è costante (senza dire chi varia), ecc.

Matematica. — *Della trasformazione delle forme differenziali quadratiche.* Nota del Corrisp. G. RICCI.

Astrofisica. — *Osservazioni astrofisiche della Nova (18.1912) Geminorum 2, eseguite nel R. Osservatorio di Catania.* Nota del Socio A. RICCÒ.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulla conservazione dell'energia e della materia nel campo gravitazionale.* Nota di MAX ABRAHAM, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nella meccanica di Minkowski ⁽¹⁾ le equazioni del moto stabiliscono che la *forza del moto*, cioè il prodotto della massa per il vettore universale di accelerazione, sia eguale al vettore universale della *forza motrice*. Riferendo entrambi i vettori all'unità di volume, ed indicando con ν la *densità di riposo* della materia, le equazioni indefinite del moto si scrivono

$$(1) \quad \ddot{v}x = K_x, \quad \ddot{v}y = K_y, \quad \ddot{v}z = K_z, \quad \ddot{v}u = K_u.$$

Introduciamo un *tensore universale* simmetrico, le cui dieci componenti:

$$\begin{aligned} X_x, Y_y, Z_z, U_u, X_y = Y_x, Y_z = Z_y, Z_x = X_z, \\ X_u = U_x, Y_u = U_y, Z_u = U_z \end{aligned}$$

si trasformano come i quadrati ed i prodotti delle componenti di un vettore universale (di prima specie); da questo tensore deriviamo la forza motrice unitaria colle formole

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} K_x &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \frac{\partial X_u}{\partial u}, \\ K_y &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \frac{\partial Y_u}{\partial u}, \\ K_z &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \frac{\partial Z_u}{\partial u}, \\ K_u &= \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\partial U_u}{\partial u}. \end{aligned} \right.$$

Tale rappresentazione della forza motrice è sempre possibile nell'elettrodinamica ⁽²⁾. Essa si trova pure nella teoria dell'elasticità, sviluppata dall'Herglotz ⁽³⁾ in base al principio di relatività. Infine la forza motrice della gravitazione si deduce da un tensore universale, come dimostrai in una Nota recente ⁽⁴⁾; occorre però collegare il potenziale gravitazionale Φ colla velo-

⁽¹⁾ H. Minkowski, *Spazio e tempo*. Nuovo Cimento, XVIII (1909).

⁽²⁾ M. Abraham, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1909^a, 1910^a.

⁽³⁾ G. Herglotz, Annalen der Physik, 36, pag. 493, 1911.

⁽⁴⁾ M. Abraham, Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, XX, fasc. 12^a, 1911^a; XXI, fasc. 1^a, 1912^a.

cità della luce (c) nel modo seguente:

$$(3) \quad \frac{1}{2} c^2 = \Phi + \text{costante.}$$

In quanto a questa costante addizionale, conviene porla eguale a zero ⁽¹⁾, togliendo così l'arbitrarietà del potenziale Φ ; altrimenti con essa si introdurrebbe una nuova costante universale, probabilmente priva di significato fisico. In ogni modo dalla (3) segue

$$(3a) \quad c \text{ grad } c = \text{grad } \Phi, \quad c \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

La variabilità di c fa sì, che il gruppo di Lorentz vale soltanto nell'infinitesimo, essendo

$$dx, dy, dz \quad \text{e} \quad du = ic dt$$

le componenti di uno spostamento infinitesimo in uno spazio a quattro dimensioni.

Rappresentiamo nella forma (2) le forze motrici elettrodinamiche, elastiche e gravitazionali, derivando ognuna di esse dal *tensore universale motore* corrispondente. Indicheremo nel seguito con K la forza motrice risultante, dedotta nelle (2) dal tensore motore risultante T .

Alla *forza del moto* si può dare una forma analoga. Ammettiamo la *condizione di continuità* ⁽²⁾ di Minkowski

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial x} (v\dot{x}) + \frac{\partial}{\partial y} (v\dot{y}) + \frac{\partial}{\partial z} (v\dot{z}) + \frac{\partial}{\partial u} (v\dot{u}) = 0.$$

Allora valgono relazioni del tipo:

$$\begin{aligned} v\ddot{x} &= v \frac{d\dot{x}}{d\tau} = v\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + v\dot{y} \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} + v\dot{z} \frac{\partial \dot{x}}{\partial z} + v\dot{u} \frac{\partial \dot{x}}{\partial u} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (v\dot{x}^2) + \frac{\partial}{\partial y} (v\dot{x}\dot{y}) + \frac{\partial}{\partial z} (v\dot{x}\dot{z}) + \frac{\partial}{\partial u} (v\dot{x}\dot{u}). \end{aligned}$$

Esse ci permettono di scrivere le componenti della forza del moto

$$(5) \quad \begin{cases} v\ddot{x} = - \left(\frac{\partial X_x^*}{\partial x} + \frac{\partial X_y^*}{\partial y} + \frac{\partial X_z^*}{\partial z} + \frac{\partial X_u^*}{\partial u} \right), \\ v\ddot{y} = - \left(\frac{\partial Y_x^*}{\partial x} + \frac{\partial Y_y^*}{\partial y} + \frac{\partial Y_z^*}{\partial z} + \frac{\partial Y_u^*}{\partial u} \right), \\ v\ddot{z} = - \left(\frac{\partial Z_x^*}{\partial x} + \frac{\partial Z_y^*}{\partial y} + \frac{\partial Z_z^*}{\partial z} + \frac{\partial Z_u^*}{\partial u} \right), \\ v\ddot{u} = - \left(\frac{\partial U_x^*}{\partial x} + \frac{\partial U_y^*}{\partial y} + \frac{\partial U_z^*}{\partial z} + \frac{\partial U_u^*}{\partial u} \right). \end{cases}$$

⁽¹⁾ Questa semplificazione devo ad un gentile suggerimento del prof. Planck.

⁽²⁾ Resta escluso in questa Nota lo sviluppo di calore, il quale modificherebbe la equazione di continuità (4) come pure le equazioni del moto (1).

Questo tensore T^* chiamiamo *tensore universale del moto*; le sue dieci componenti determinano le *tensioni cinetiche*:

$$(5a) \quad X_x^* = -v\dot{x}^2, \quad Y_y^* = -v\dot{y}^2, \quad Z_z^* = -v\dot{z}^2, \\ X_y^* = Y_x^* = -v\dot{x}\dot{y}, \quad Y_z^* = Z_y^* = -v\dot{y}\dot{z}, \quad Z_x^* = X_z^* = -v\dot{z}\dot{x},$$

la *corrente di energia* (S^*) e l'*impulso unitario* (g^*) della materia:

$$(5b) \quad \begin{cases} S_x^* = c^2 g_x^* = icX_u^* = icU_x^* = -icv\dot{x}u = vc^2\dot{x}t, \\ S_y^* = c^2 g_y^* = icY_u^* = icU_y^* = -icv\dot{y}u = vc^2\dot{y}t, \\ S_z^* = c^2 g_z^* = icZ_u^* = icU_z^* = -icv\dot{z}u = vc^2\dot{z}t, \end{cases}$$

ed infine la *densità dell'energia della materia*:

$$(5c) \quad \varepsilon^* = U_u^* = -v\dot{u}^2 = vc^2(\dot{t})^2 = \mu c^2 k^{-1},$$

essendo

$$(6) \quad \mu = v\dot{t} = v \frac{dt}{d\tau} = vk^{-1}$$

la *densità della materia*.

Siccome si ha

$$(6a) \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} \dot{t} = \frac{dx}{dt} k^{-1} = v_x k^{-1} \dots \quad (v \text{ vettore velocità}),$$

le (5b, 5c) danno

$$(6b) \quad S^* = c^2 g^* = \mu c^2 k^{-1} \cdot v = \varepsilon^* \cdot v$$

per la *corrente di energia trasportata dalla materia*.

In modo analogo il tensore motore risultante T individua le risultanti delle tensioni, correnti (S) e densità (ε) di energia elastiche, elettromagnetiche e gravitazionali. Dalle (1), (2) e (5) seguono, riunendo i tensori T e T^* , i *teoremi dell'impulso e dell'energia* nella forma:

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial(cg_x + cg_x^*)}{c \partial t} = \frac{\partial(X_x + X_x^*)}{\partial x} + \frac{\partial(X_y + X_y^*)}{\partial y} + \frac{\partial(X_z + X_z^*)}{\partial z}, \\ \frac{\partial(cg_y + cg_y^*)}{c \partial t} = \frac{\partial(Y_x + Y_x^*)}{\partial x} + \frac{\partial(Y_y + Y_y^*)}{\partial y} + \frac{\partial(Y_z + Y_z^*)}{\partial z}, \\ \frac{\partial(cg_z + cg_z^*)}{c \partial t} = \frac{\partial(Z_x + Z_x^*)}{\partial x} + \frac{\partial(Z_y + Z_y^*)}{\partial y} + \frac{\partial(Z_z + Z_z^*)}{\partial z}; \end{cases}$$

$$(8) \quad \frac{\partial(\varepsilon + \varepsilon^*)}{\partial t} = -c \operatorname{div} \left(\frac{S + S^*}{c} \right).$$

Occorre ora discutere queste formole, per far rilevare l'influenza della variazione di c nel campo gravitazionale, completando i risultati della Nota precedente ⁽¹⁾.

Dalla (8) segue per un campo stazionario

$$\operatorname{div} \left(\frac{S + S^*}{c} \right) = 0;$$

cioè: il vettore della corrente stazionaria di energia, diviso per la velocità della luce, è solenoidale. Dunque, se una quantità di energia di riposo (E_0) viene trasferita dal potenziale Φ_0 al potenziale superiore Φ , la energia di riposo, che arriva al livello Φ , è maggiore di E_0 , e precisamente eguale a

$$(9) \quad E = E_0 \cdot \frac{c}{c_0}.$$

Quindi la legge della conservazione dell'energia vale, non già per l'energia di riposo stessa, ma per questa energia divisa per la velocità della luce. Essendo, secondo la (3),

$$c = \sqrt{c_0^2 + 2(\Phi - \Phi_0)} \quad , \quad \frac{c}{c_0} = \sqrt{1 + \frac{2(\Phi - \Phi_0)}{c_0^2}},$$

si può in modo approssimativo scrivere la (9)

$$(9a) \quad E = E_0 + \frac{E_0}{c_0^2} (\Phi - \Phi_0),$$

ed interpretare questa formola, come fece l'Einstein ⁽²⁾, attribuendo alla energia una massa pesante eguale — come pure la massa inerte — alla energia di riposo divisa per il quadrato della velocità della luce.

Questa spiegazione diventa ancora più attendibile per la (8); scriviamo il secondo membro di questa equazione, tenendo conto della (3a):

$$\begin{aligned} -c \operatorname{div} \left(\frac{S + S^*}{c} \right) &= -\operatorname{div} (S + S^*) + \frac{(S + S^*)}{c^2} \cdot \operatorname{grad} \Phi \\ &= -\operatorname{div} (S + S^*) - (g + g^*) \cdot F, \end{aligned}$$

dove F indica la forza gravitazionale agente sulla massa unitaria.

Allora il teorema della conservazione dell'energia per un campo qualsiasi diventa:

$$(10) \quad -\frac{\partial(s + s^*)}{\partial t} = \operatorname{div} (S + S^*) + (g + g^*) \cdot F.$$

⁽¹⁾ M. Abraham, Rend. della R. Accad. dei Lincei, XXI, 1° fasc., 1912.

⁽²⁾ A. Einstein, Annalen der Physik, 35, pag. 902, 1911.

Risalta il significato del termine (ved. 6b)

$$(10a) \quad g^* \cdot F = \frac{S^*}{c^2} \cdot F = \frac{\varepsilon^*}{c^2} v \cdot F = \mu k^{-1} v \cdot F$$

come lavoro compiuto dalla gravità nel moto della materia; ed è precisamente la massa trasversale (di densità μk^{-1}) sulla quale agisce la gravità. Nell'espressione (10) del teorema della conservazione dell'energia va tenuto conto di questo lavoro, come pure di un lavoro analogo compiuto dalla gravità in una corrente di energia qualsiasi.

Siccome la massa m della materia è eguale al rapporto tra energia di riposo E e c^2 , la legge della conservazione della materia, identica a quella della conservazione dell'energia, diventa:

$$(11) \quad m c = \text{costante.}$$

Nel campo gravitazionale rimane costante il prodotto della massa per la velocità della luce.

Così si spiega la forma data in una Nota precedente ⁽¹⁾ all'equazione dell'energia per un punto materiale moventesi in un campo gravitazionale statico:

$$(11a) \quad \frac{d}{d\tau} (c k^{-1}) = 0.$$

Difatti, moltiplicando per la costante $m c$, si ottiene

$$(11b) \quad \frac{d}{d\tau} (m c^2 k^{-1}) = 0,$$

e si giunge all'espressione solita ($m c^2 k^{-1}$) assegnata dalla teoria di relatività all'energia della materia in moto.

Dalle (11) e (3) segue

$$\dot{m} c + m \dot{c} = \dot{m} c + \frac{m}{c} \dot{\Phi} = 0;$$

quindi

$$(12) \quad \dot{m} = - \frac{m}{c^2} \dot{\Phi}.$$

Un risultato analogo relativo alla densità μ della materia si ottiene dalla equazione di continuità (4), la quale può scriversi

$$\text{div } \mu v + \frac{\partial \mu c}{c \partial t} = 0,$$

⁽¹⁾ M. Abraham, Rend. della R. Acc. dei Lincei, XX, fasc. 12, 1911, equazione (9).

ossia, secondo la (3a),

$$(12a) \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} = - \operatorname{div} \mu v - \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Le (12) e (12a) indicano la variazione col tempo della massa e della sua densità nel campo gravitazionale.

Di questa influenza del potenziale gravitazionale bisogna pure tenere conto nel calcolare il cambiamento, che l'impulso subisce col tempo. Abbiamo, per la prima componente della *forza del moto di un punto materiale*

$$\ddot{m}x = \frac{d}{dx} (m\dot{x}) - \dot{x}\dot{m} = \frac{d}{dx} (m\dot{x}) + \frac{m\dot{x}}{c^2} \dot{\Phi};$$

perciò la prima delle equazioni del moto diventa

$$(13) \quad \frac{d}{dx} (m\dot{x}) + \frac{m\dot{x}}{c^2} \dot{\Phi} = -m \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Passando all'unità di volume di un corpo continuo, al suo impulso g^* ed alla derivazione locale, il primo membro della (13) corrisponde all'espressione seguente:

$$(13a) \quad \frac{\partial g_x^*}{\partial t} + \frac{g_x^*}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial g_x^*}{\partial t} + \frac{g_x^*}{c} \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial c g_x^*}{c \partial t}.$$

Ora si spiega la presenza di questi termini e di termini analoghi relativi all'impulso del campo elettromagnetico e gravitazionale ed all'impulso prodotto dallo stato di tensione della materia, nell'espressione generale (7) del *teorema dell'impulso*. Possiamo, in virtù della (13a), scrivere la prima delle (7):

$$(14) \quad \frac{\partial (g_x + g_x^*)}{\partial t} + \frac{g_x + g_x^*}{c^2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \\ = \frac{\partial (X_x + X_x^*)}{\partial x} + \frac{\partial (X_y + X_y^*)}{\partial y} + \frac{\partial (X_z + X_z^*)}{\partial z}.$$

Riassumendo l'interpretazione data ai termini introdotti nei teoremi dell'impulso (14) e dell'energia (10) dal variare della velocità della luce col potenziale gravitazionale, abbiamo l'enunciato espressivo che *nel campo gravitazionale le leggi della conservazione della materia e dell'energia di riposo prendono la forma:*

$$(15) \quad mc = \frac{E}{c} = \text{costante}.$$

Matematica. — *Sopra una questione tecnica che si connette cogli integrali di Lebesgue.* Nota del dott. LUCIANO ORLANDO, presentata dal Corrispondente A. DI LEGGE.

Noi vogliamo qui riunire, sulla traccia di un esempio scelto *ad hoc*, alcune idee (già da un pezzo, in varie occasioni, applicate da valenti tecnici, quali il Della Riccia e il Giorgi), che si connettono con teorie modernissime relative agl'integrali. Il dualismo fra cattiva pratica e cattiva teoria effettivamente esiste, ma non bisogna credere che esso sia la base di un dualismo fra la buona pratica e la buona teoria.

Supponiamo che una città riceva l'energia elettrica da diverse fonti, e cioè:

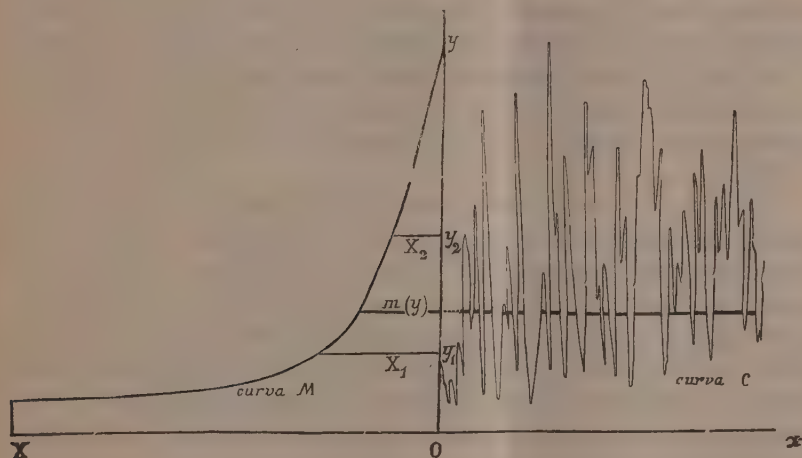
- a) un impianto idraulico, che sfrutti la portata perenne di un fiume;
- b) un impianto idraulico, che si appoggi ad un bacino, il quale raccolga il rifiuto delle piene;
- c) un impianto a vapore.

Sia 100 lire la spesa relativa all'impianto a) per kw-anno, e sia trascurabile la spesa di consumo per kwh; sia 70 lire la spesa relativa all'impianto b) per kw-anno, e sia 0,02 la spesa di consumo per kwh; sia 50 lire la spesa relativa all'impianto c) per kw-anno, e sia 0,05 la spesa di consumo per kwh.

Consideriamo il diagramma annuale C del consumo in kw: le ascisse x denoteranno i tempi, e le ordinate y denoteranno i kw. Questo diagramma annuale C si ottiene ponendo in prolungamento i diagrammi diurni; si tratta evidentemente di aver da fare con una lunghissima striscia di carta, perchè, se si volesse, con opportuna scala, notevolmente accorciare il diagramma, allora le oscillazioni interdiurne sarebbero rappresentate da ghirigori illeggibili. Lasciando dunque che il diagramma si slunghi quanto è necessario perchè possa dirsi un leggibile diagramma, consideriamo un'ordinata y corrispondente ad un certo quantitativo di kw. Sopra la retta di ordinata y , esisteranno parti interne all'area limitata dal diagramma, e parti esterne a tale area: valutiamo, e chiamiamo $m(y)$ la somma delle lunghezze che risultano interne. In pratica questa valutazione richiede alquanto tempo, se vuol essere eseguita con sufficiente precisione: si potrà affidare ad un disegnatore la misurazione delle parti interne, ad un altro (che non debba conoscere le operazioni del primo) si affiderà la misurazione delle parti esterne; e, se la somma si scosterà troppo dalla lunghezza che rappresenta un anno, si ripeteranno le operazioni, finchè i due operatori si mettano automaticamente d'accordo. Un altro sistema sarebbe quello di munire le macchine

che descrivono C di registratori automatici, per esempio del tipo Wright. Se si adoperano i due disegnatori, sarà bene raccomandare all'uno ed all'altro di misurare in eccesso. Questa misurazione dovrà disgraziatamente ripetersi per molte y , fra di loro vicinissime.

Fatta una tabella di tutte queste $m(y)$, si tracci, in conveniente scala, una curva M , di equazione $X = m(y)$: l'area di questa curva sarà uguale a quella della curva C . L'area sarebbe rigorosamente la stessa, se le misure fossero esattamente valutate per ogni y ; ciò evidentemente non accade, ma essendo $X = m(y)$ una funzione monotona della variabile y , le y intermedie fra due valori vicini della tabella saranno molto bene approssimabili.



Ciò posto, paragoniamo il prezzo di un kwh fornito dall'impianto a) col prezzo di un kwh fornito dall'impianto b). La relazione

$$(1) \quad 70 + 0,02 X_1 \leq 100,$$

onde si deduce che X_1 non deve essere superiore a 1500 ore, mostra che non conviene aggiungere il servizio dell'impianto b) a quello (permanente) dell'impianto a), se quest'aggiunzione debba farsi per un numero complessivo di ore che superi 1500; per meno di 1500 ore complessive è conveniente, invece, aiutarsi anche coll'impianto b). La relazione

$$(2) \quad 50 + 0,05 X_2 \leq 70 + 0,02 X_2,$$

onde si deduce che X_2 non deve superare 667 ore, mostra che conviene appoggiarsi anche all'impianto c), ma per una durata complessiva che non superi 667 ore.

Se, dunque, sulla curva M scegliamo un punto (unico evidentemente) di ascissa $X_1 = 1500$, e poi un altro (anch'esso evidentemente unico) di ascissa $X_2 = 667$, e conduciamo per questi due punti (X_1, y_1) , (X_2, y_2) le parallele all'asse X , avremo segmentato l'area determinata da M in tre segmenti. Se regoliamo le cose in modo che, quando il consumo giunge ad y_1 kilowatt, si aggiunga all'impianto a) l'impianto b), e che, quando il consumo giunge ad y_2 kilowatt, si aggiunga ai due precedenti anche l'impianto c), noi veniamo ad utilizzare i tre impianti nel modo più economico. In pratica bisognerà fondarsi sui diagrammi degli anni precedenti, non essendo evidentemente disponibile il diagramma dell'anno in corso.

Le altezze dei segmenti nei quali resta ripartita M ci forniscono una immediata idea della potenzialità necessaria ad ognuno dei tre impianti; le aree forniscono il lavoro annuale. Evidentemente i costi unitari dell'energia, che per facilità abbiamo considerati come numeri fissi *a priori*, sono funzioni di questi elementi. Volendo tener conto di ciò, si potrebbero scrivere alcune relazioni funzionali, risolubili praticamente con metodi di falsa posizione.

Noi non vogliamo, in questa breve Nota, far cenno delle questioni alle quali ciò condurrebbe; ci basta osservare che l'area di M è l'integrale della funzione $y(x)$ che rappresenta le ordinate del diagramma, e che questo modo di considerare l'integrale è la base delle moderne considerazioni di Lebesgue (¹). Le questioni relative alle X sono questioni che c'illuminano circa il modo d'intendere i moderni concetti di misura: la grandezza $X = m(y)$ misura il tempo durante il quale il consumo non è inferiore ad y kw: questa durata è indipendente da qualsivoglia considerazione relativa alla continuità del diagramma.

(¹) L'ing. Della Riccia ebbe occasione di valersi di questo criterio, nello studio di un impianto, a Bruxelles, nel 1902; egli avrebbe, nell'essenza del criterio, percorso Lebesgue. Ciò aggiunge un merito a quelli numerosissimi del Della Riccia, senza togliere nulla al Lebesgue, che certamente non fu spinto alle sue teorie da considerazioni di elettrotecnica.

Fisica matematica. — *Sulla propagazione del calore*. Nota del dott. L. SILLA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. La celebre Memoria del Poincaré *Sur les équations de la Physique mathématique* ⁽¹⁾ e gli altri lavori che ne seguirono, hanno posto oramai fuori di dubbio l'esistenza delle *soluzioni eccezionali* relative alle equazioni della propagazione del calore; anzi i recenti progressi sulle equazioni integrali hanno permesso di dimostrare l'esistenza di tali soluzioni in casi assai generali, circa la natura della superficie del corpo che si considera ⁽²⁾.

La sviluppabilità della funzione che rappresenta la temperatura iniziale del corpo in serie di soluzioni eccezionali, e, corrispondentemente, la dimostrazione di esistenza dell'integrale delle equazioni della propagazione del calore, si sono ottenute nell'ipotesi che la detta funzione sia finita e continua nel suo campo di variabilità insieme con le derivate parziali dei primi tre ordini ⁽³⁾, mentre la natura stessa del problema richiede al più l'esistenza delle sole derivate prime.

Un recente teorema del Weyl ⁽⁴⁾ permette di dimostrare la sviluppabilità della funzione in discorso e il teorema di esistenza per la soluzione del problema del calore, nell'ipotesi che la temperatura iniziale abbia le derivate prime finite nei punti dell'interno del corpo e la derivata normale nei punti della superficie, come mi propongo di mostrare nella presente Nota.

2. Il problema del raffreddamento d'un corpo omogeneo ed isotropo S, limitato da una superficie σ , si riduce, com'è noto, alla determinazione di una funzione $V(x, y, z, t)$ la quale, per tutti i valori del tempo t , soddisfi alle equazioni

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} = K \Delta V, & \text{(nei punti di S)} \\ \frac{dV}{dn} = hV & \text{(nei punti di } \sigma) \end{cases}$$

e sia, inoltre,

$$(2) \quad (V)_{t=0} = f(x, y, z).$$

(1) Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. VIII (1894).

(2) G. Lauricella, *Applicazione della teoria di Fredholm al problema del raffreddamento dei corpi* (Annali di Matematica, ser. III, t. XIV, 1908).

(3) G. Lauricella, loc. cit., pag. 169. ed inoltre: *Sull'integrazione delle equazioni della propagazione del calore* [Memorie della Società italiana delle Scienze (detta dei XL), ser. III, t. XII, 1902].

(4) H. Weyl, *Ueber die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten* (Math. Annalen, t. LXVII, 1909) ed inoltre M. Plancherel, *Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. XXX, 1910).

La funzione V rappresenta la temperatura dei punti (x, y, z) del corpo S ; K indica una costante positiva proporzionale al coefficiente di conducibilità interna del corpo; n la normale nei punti di σ , diretta positivamente verso l'interno di S ; h una costante positiva proporzionale al potere emissivo della superficie σ ed $f(x, y, z)$ una funzione che rappresenta lo stato termico iniziale noto nei punti di S . Si suppone che il corpo si trovi immerso in un ambiente di cui la temperatura nei punti di σ sia eguale a zero.

L'integrazione delle equazioni (1), con la condizione (2), si può far dipendere, com'è noto, dalla soluzione del problema: Sviluppare la funzione arbitraria $f(x, y, z)$ in serie delle funzioni $p_i(x, y, z)$, integrali delle equazioni

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta_2 p_i + k_i p_i = 0, & (\text{nei punti di } S) \\ \frac{dp_i}{dn} = h p_i. & (\text{nei punti di } \sigma) \end{array} \right.$$

Le funzioni p_i (*soluzioni eccezionali*) sono determinate ciascuna a meno di un fattore costante e formano notoriamente un sistema *ortogonale*. Il fattore costante si può determinare in modo che, oltre alla condizione,

$$\int_S p_i p_j dS = 0 \quad (i \neq j),$$

si abbia ancora

$$\int_S p_i^2 dS = 1.$$

Le quantità k_i (*valori eccezionali* cui corrispondono le soluzioni eccezionali p_i), qualunque sia il valore di h , costituiscono una successione, crescente con i , avente per limite l'infinito.

3. Ciò premesso, noi vogliamo ora dimostrare che *la successione delle p_i è chiusa*, vale a dire che non esiste alcuna funzione $h(x, y, z)$, la quale abbia le derivate prime finite nell'interno del campo S , sia diversa da zero e tale che siano soddisfatte le infinite relazioni

$$\int_S h p_i dS = 0. \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

Infatti, data una funzione qualsiasi $f(x, y, z)$, definita entro S , la quale abbia le derivate prime finite (i punti di σ al più esclusi) e dato un parametro k , si sa ⁽¹⁾ che esistono una quantità k_1 finita positiva e una funzione $w(x, y, z; k)$ che è regolare in S per $|k| < k_1$, indicando k_1 una

(¹) Cfr. G. Lauricella, *Annali di Matematica*, loc. cit.

quantità finita positiva, e che ammette un polo semplice per $k = k_1$. La funzione w , per $|k| < k_1$, soddisfa alle equazioni

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 w + kw(x, y, z; k) + f(x, y, z) = 0, \quad (\text{nei punti di } S) \\ \frac{dw}{dn} = hw, \quad (\text{nei punti di } \sigma) \end{array} \right.$$

ed il residuo p_1 di w nel punto $k = k_1$ soddisfa alle equazioni

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 p_1 + k_1 p_1 = 0, \\ \frac{dp_1}{dn} = hp_1. \end{array} \right.$$

Posto

$$w(x, y, z; k) = \frac{p_1}{k_1 - k} + w_1(x, y, z; k),$$

si ha che $w_1(x, y, z; k)$ è regolare per $|k| \leq k_1$ e, in virtù delle (3) e (5), verifica le equazioni

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 w_1 + kw_1(x, y, z; k) + (f - p_1) = 0, \quad (\text{nei punti di } S) \\ \frac{dw_1}{dn} = hw_1. \quad (\text{nei punti di } \sigma) \end{array} \right.$$

Moltiplicando la prima delle (5) per $w_1(x, y, z; k_1)$ e la prima delle (6) (nelle quali si sia fatto $k = k_1$) per $p_1(x, y, z)$ e poi sottraendo membro a membro ed integrando il risultato a tutto il campo S , si ottiene

$$\int_S (w_1 \Delta_2 p_1 - p_1 \Delta_2 w_1) dS = \int_S p_1 (f - p_1) dS.$$

E poichè il primo integrale è nullo, giacchè

$$\int_\sigma \left(w_1 \frac{dp_1}{dn} - p_1 \frac{dw_1}{dn} \right) d\sigma = 0,$$

si ha

$$\int_S f p_1 dS = \int_S p_1^2 dS \neq 0.$$

Questo risultato si può enunciare dicendo che non esiste alcuna funzione $f(x, y, z)$ del campo S , soddisfacente alle anzidette condizioni, tale che si abbia, per tutti i possibili valori dell'indice i ,

$$\int_S f p_i dS = 0,$$

ossia, in altri termini, le funzioni $p_i(x, y, z)$ costituiscono una successione chiusa.

4. Sulla funzione $f(x, y, z)$ dei punti del campo S , che noi vogliamo rappresenti la temperatura iniziale del corpo, faremo l'ipotesi che abbia le derivate del primo ordine finite nei punti di S e la derivata normale nei punti di σ e inoltre, come si può sempre supporre ⁽¹⁾, senza nulla togliere alla generalità, che nei punti di σ , soddisfi alla condizione

$$\frac{df}{dn} = hf.$$

Facciamo corrispondere alla funzione f la successione dei suoi *coefficienti di Fourier*.

$$A_i = \int_S f p_i dS \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

relativa al sistema ortogonale delle p_i .

Dall'identità di Bessel si ha

$$\int_S \left\{ f - \sum_{i=1}^n A_i p_i \right\}^2 dS = \int_S f^2 dS - \sum_{i=1}^n A_i^2;$$

quindi dovrà aversi

$$\sum_{i=1}^n A_i^2 \leq \int_S f^2 dS.$$

Tanto basta per concludere che la serie $\sum_{i=1}^{\infty} A_i^2$ è convergente; scelto, perciò, ε positivo e piccolo a piacere, esisterà un intiero m_1 tale che, per $m > m_1$, sarà certamente soddisfatta la condizione

$$(7) \quad \sum_{i=m+1}^{m+q} A_i^2 < \varepsilon,$$

qualunque sia q .

Consideriamo ora la successione

$$f_j = \sum_{i=1}^j A_i p_i \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

e costruiamo l'integrale

$$\int_S (f_s - f_m)^2 dS.$$

Se $m > m_1$ ed $s > m_1$, posto $s = m + q$, risulterà

$$\int_S (f_s - f_m)^2 dS = \int_S \left\{ \sum_{i=m+1}^{m+q} A_i p_i \right\}^2 dS = \sum_{i=m+1}^{m+q} A_i^2 < \varepsilon.$$

⁽¹⁾ Cfr. G. Lauricella, *Sulla propagazione del calore* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, t. XXXIII, 1898).

Si conclude che la successione delle funzioni f_i è *convergente in media*, secondo Fischer, in tutto il campo S, e perciò, pel teorema di Weyl, è sempre possibile di scegliere una serie di indici $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ tali che

$$f_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1}) + (f_{n_3} - f_{n_2}) + \dots$$

converge uniformemente in generale, nel campo S, verso un'unica funzione la quale ha per coefficienti di Fourier i numeri A_i . Questa funzione, poichè la successione delle p_i è chiusa, coinciderà con la funzione $f(x, y, z)$ che esprime le condizioni termiche iniziali del corpo S. Se poniamo, quindi

$$v_1 = f_{n_1} \quad , \quad v_i = f_{n_i} - f_{n_{i-1}} = \sum_{n_{i-1}+1}^{n_i} A_r p_r \quad ,$$

la serie

$$(8) \quad v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_i + \dots$$

sarà equiconvergente in generale in tutto il campo S e si avrà, poichè la successione delle p_i è chiusa,

$$f(x, y, z) = \sum_i^{\infty} v_i.$$

5. Tenuto ora presente che i numeri k_r costituiscono una successione avente per limite l'infinito (n. 2), sarà possibile, per un determinato valore positivo di t e per qualunque valore dell'indice r superiore ad un certo numero intero, di soddisfare alla disuguaglianza

$$(9) \quad k_r^4 e^{-2\pi k_r t} < 1.$$

Poniamo

$$v'_i = \sum_r^{n_i} A_r p_r k_r^2 e^{-\pi k_r t},$$

dove $n_1, n_2, n_3, \dots, n_i, \dots$ sono gli *stessi* numeri precedentemente determinati, in virtù del teorema di Weyl, e si consideri la nuova successione

$$\varphi'_j = \sum_i^j v'_i: \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

per $s = d + q$ avremo

$$\begin{aligned} \int_s (\varphi'_s - \varphi'_d)^2 dS &= \int_s \left(\sum_{d+1}^{d+q} v'_i \right)^2 dS = \\ &= \int_s \left\{ \sum_{n_d+1}^{n_{d+q}} A_r p_r k_r^2 e^{-\pi k_r t} \right\}^2 dS = \sum_{n_d+1}^{n_{d+q}} A_r^2 k_r^4 e^{-2\pi k_r t}. \end{aligned}$$

Segue, avuto riguardo alle (7) e (9), che la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi'_i$ è *convergente in media*; quindi, pel teorema di Weyl, esisteranno dei numeri interi, positivi crescenti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ tali che la serie

$$(10) \quad \varphi'_{\lambda_1} + (\varphi'_{\lambda_2} - \varphi'_{\lambda_1}) + (\varphi'_{\lambda_3} - \varphi'_{\lambda_2}) + \dots$$

è equiconvergente in generale nel campo S. Ma, in virtù della equiconvergenza in generale della serie (8), si può dire certamente che, posto $u_i = \sum_{r=1}^i v_r$, la serie

$$(11) \quad u_{\lambda_1} + (u_{\lambda_2} - u_{\lambda_1}) + (u_{\lambda_3} - u_{\lambda_2}) + \dots$$

è pure equiconvergente in generale entro S e vi rappresenterà sempre la medesima funzione $f(x, y, z)$, giacchè la serie (11) non è altro che la (8) alla quale è stata applicata la proprietà associativa. Esaminando, dunque, le due serie (10) e (11) noi possiamo affermare che esiste una serie di numeri interi e positivi crescenti $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \dots$ tali che le serie

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{\lambda'_1} A_i p_i \quad + \quad \sum_{i=\lambda'_1+1}^{\lambda'_2} A_i p_i \quad + \quad \sum_{i=\lambda'_2+1}^{\lambda'_3} A_i p_i \quad + \dots, \\ \sum_{i=1}^{\lambda'_1} A_i p_i k_i^2 e^{-\kappa k_i t} + \sum_{i=\lambda'_1+1}^{\lambda'_2} A_i p_i k_i^2 e^{-\kappa k_i t} + \sum_{i=\lambda'_2+1}^{\lambda'_3} A_i p_i k_i^2 e^{-\kappa k_i t} + \dots, \end{array} \right.$$

sono equiconvergenti in generale nel campo S e la prima serie ha per somma $f(x, y, z)$. Ciò che importa di notare è che nelle due serie l'aggruppamento dei teoremi corrisponde agli *stessi valori degli indici* $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \dots$

6. In modo analogo, partendo dalla disuguaglianza

$$k_i^2 e^{-\kappa k_i t} < 1$$

e dalla successione

$$w'_i = \sum_{r=\lambda'_{i-1}+1}^{\lambda'_i} A_r p_r k_r e^{-\kappa k_r t},$$

dove $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \dots$ sono gli *stessi* indici che figurano nelle serie (12), e posto

$$\psi'_j = \sum_{i=1}^j w'_i, \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

si proverebbe la *convergenza in media* della successione delle ψ'_j e quindi la esistenza, a norma del teorema di Weyl, di infiniti numeri interi e positivi crescenti $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ tali che la serie

$$\psi'_{\mu_1} + (\psi'_{\mu_2} - \psi'_{\mu_1}) + (\psi'_{\mu_3} - \psi'_{\mu_2}) + \dots$$

risulti equiconvergente in generale nel campo S. Ma allora, valendosi della proprietà associativa per le serie (12), si può concludere che esiste una serie di numeri interi e positivi crescenti $\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \dots$ tali che le tre serie

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\mu'_1} A_i p_i + \sum_{\mu'_1+1}^{\mu'_2} A_i p_i + \dots, \\ & \sum_{i=1}^{\mu'_1} A_i p_i h_i^2 e^{-\kappa h_i t} + \sum_{\mu'_1+1}^{\mu'_2} A_i p_i h_i^2 e^{-\kappa h_i t} + \dots, \\ & \sum_{i=1}^{\mu'_1} A_i p_i h_i e^{-\kappa h_i t} + \sum_{\mu'_1+1}^{\mu'_2} A_i p_i h_i e^{-\kappa h_i t} + \dots, \end{aligned} \right.$$

convergono in egual grado generalmente in S e che la prima rappresenta la funzione $f(x, y, z)$ in quel campo.

Finalmente, sempre con lo stesso metodo, e partendo dagli indici $\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \dots$, si proverebbe che esiste una serie di numeri positivi crescenti indefinitamente $\nu'_1, \nu'_2, \nu'_3, \dots$ tali che le quattro serie

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\nu'_1} A_i p_i + \sum_{\nu'_1+1}^{\nu'_2} A_i p_i + \dots, \\ & \sum_{i=1}^{\nu'_1} A_i p_i h_i^2 e^{-\kappa h_i t} + \sum_{\nu'_1+1}^{\nu'_2} A_i p_i h_i^2 e^{-\kappa h_i t} + \dots, \\ & \sum_{i=1}^{\nu'_1} A_i p_i h_i e^{-\kappa h_i t} + \sum_{\nu'_1+1}^{\nu'_2} A_i p_i h_i e^{-\kappa h_i t} + \dots, \\ & \sum_{i=1}^{\nu'_1} A_i p_i e^{-\kappa h_i t} + \sum_{\nu'_1+1}^{\nu'_2} A_i p_i e^{-\kappa h_i t} + \dots, \end{aligned} \right.$$

sono equiconvergenti in generale dappertutto nel campo S e che la prima serie ha ivi per somma $f(x, y, z)$.

7. Dalla dimostrata uniforme convergenza in generale delle serie (13) segue che a quelle serie è applicabile il teorema di integrazione per serie, tanto nel campo S quanto sul contorno σ . Si possono quindi ripetere, senza alcuna modificazione, i ragionamenti contenuti nei §§ 38 e 39 della citata Memoria (della Società italiana delle Scienze) del prof. Lauricella e dai quali risulta che la funzione V. definita dall'ultima serie (13), risolve completamente il problema del raffreddamento, nel supposto che la temperatura iniziale $f(x, y, z)$ soddisfi alla sola condizione di avere le derivate prime finite nei punti dell'interno di S e le derivate normali, nei punti di σ , soddisfacenti all'equazione $\frac{df}{dn} = hf$.

Matematica. — *Sugli integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni.* Nota I di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

1. Fino dal 1879 Weierstrass aveva avvertito in modo chiaro che il concetto d'integrale, quale era stato posto dal Riemann, non poteva riuscire sufficiente ai bisogni del Calcolo delle Variazioni. E nelle sue « Vorlesungen über Variationsrechnung » aveva proposto una definizione di integrale che sembrava — ed era infatti — più larga di quella di Riemann, e si presentava naturalmente come generalizzazione della lunghezza di una linea. Il nuovo integrale esisteva e coincideva con quello riemanniano tutte le volte che veniva applicato a curve aventi tangente variabile in modo continuo e dotate, tutt'al più, di un numero finito di punti angolosi; inoltre, poteva esistere anche in casi di mancanza dell'integrale di Riemann. Non era però dimostrata la condizione essenziale perchè potesse venir accettato come generalizzazione dell'antico integrale: vale a dire, che l'esistenza di quest'ultimo portasse di necessità l'esistenza di quello, e l'identità dei due valori così definiti. La mancanza poi di condizioni sufficienti per l'esistenza dell'integrale di Weierstrass, più larghe di quelle solite che assicurano dell'integrabilità nel senso di Riemann, fece sì che la nuova definizione rimanesse per lungo tempo quasi ignorata. Fu solamente nel 1901 che essa venne ripresa dall'Osgood ⁽¹⁾, il quale, mostrando che la classe delle curve per cui esiste l'integrale generalizzato nel senso di Weierstrass, coincide con quella delle curve che ammettono l'integrale nel senso generalizzato di Hilbert — quando la funzione $F(x, y, x', y')$, che va integrata, sia sempre positiva insieme con l'invariante F_1 — fece vedere che, sotto le stesse ipotesi relative alle F e F_1 , l'integrale di Weierstrass esiste tutte le volte che lo si applica ad una curva rettificabile ⁽²⁾.

In ciò che segue, noi dimostreremo l'esistenza dell'integrale di Weierstrass sotto la sola condizione che la curva lungo la quale si vuole integrare abbia lunghezza determinata e finita, *liberandoci interamente da qualunque ipotesi restrittiva circa il segno delle F e F_1* . Mostreremo poi che quest'integrale è invariante rispetto alla rappresentazione analitica della curva su cui esso opera; e che è uguale all'integrale, preso nel senso del Lebesgue,

⁽¹⁾ *On a fundamental propriety of a minimum in the Calculus of Variations* ecc. (Transactions of the American Math. Society, vol. II, pag. 273 (1901).

⁽²⁾ Cfr. Bolza: *Lectures on the Calculus of Variations* (1904) pp. 248-258; L. Tonelli: *Sui massimi e minimi assoluti del Calcolo delle Variazioni*, §§ II e III (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXXII, 1911). Questa Memoria nel seguito verrà indicata con (T).

$\int_{t(0)}^{t(1)} F(x, y, x', y') dt$, quando il parametro t coincida con la lunghezza dell'arco della curva detta, oppure sia tale da rendere *assolutamente continue* le funzioni $x(t)$, $y(t)$. Da ciò la relazione fra l'integrale di Riemann e quello di Weierstrass.

L'identità dei risultati a cui conducono le definizioni di Weierstrass e di Lebesgue (quando questa venga applicata alla rappresentazione parametrica detta) potrebbe far credere inutile la considerazione della prima di esse. Ma ciò non è, perchè se talvolta, per certi ragionamenti, la definizione del Lebesgue si presta assai meglio di quella del Weierstrass, tal'altra è quest'ultima che ha un notevole vantaggio sulla prima ⁽¹⁾. Servendoci appunto della definizione del grande analista tedesco, noi mostreremo che se immaginiamo inscritta in una data curva una poligonale, l'integrale di una stessa funzione $F(x, y, x', y')$, esteso alla poligonale, tende a quello relativo alla curva, col tendere a zero di tutti i lati della poligonale medesima. Resterà così pienamente giustificata, anche per l'integrale preso nel senso del Lebesgue, un'affermazione di Hadamard ⁽²⁾, secondo la quale ogni curva per cui esiste l'integrale della F può riguardarsi come limite di curve ordinarie (aventi cioè tangente continua, salvo in punti isolati) tali che i loro integrali tendano all'integrale di quella primieramente considerata. Questa proposizione potrebbe indurre a ritenere superflua la considerazione di integrali più generali di quello di Riemann, perchè da essa si trae che, se una curva rende minimo l'integrale della F fra quelle ordinarie, lo rende minimo anche fra tutte le altre. Tale considerazione è, invece, indispensabile, per il fatto che le curve *minimum* possono non essere ordinarie, e non è possibile perciò scartare *a priori* tutte le curve che ordinarie non sono, senza correre il rischio di eliminare quella che forma precisamente lo scopo della ricerca ⁽³⁾. In una

(¹) Noi stessi, in (T) § VI, basandoci sulla definizione di Weierstrass, potemmo ottenere una proposizione relativa all'integrale della F , calcolato lungo una curva, che, per altra via, non sarebbe stato forse possibile ottenere.

(²) *Leçons sur le Calcul des Variations*. Paris. 1910, pag. 483.

(³) La considerazione di integrali più generali di Riemann, in questioni di Calcolo delle Variazioni, si è già presentata a noi indispensabile nella Memoria (T). A proposito della quale vogliamo osservare che un caso particolare del teorema di minimo in essa stabilito è stato ritrovato recentissimamente dal dott. A. Signorini (vedi questi Rendiconti, gennaio 1912 e Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, 1912). Il metodo di dimostrazione seguito da codesto A. è assai semplice ed elegante, ed è un vero peccato che non possa estendersi al teorema generale da noi dimostrato. Il Signorini aggiunge, in nostro confronto, due limitazioni: una riguardante la varietà delle curve considerate, e l'altra relativa al contorno del campo in cui giacciono le curve. Egli, infatti, considera solo la classe di *tutte* le curve del campo, mentre noi consideriamo classi più generali, che contengono quella come caso particolare; inoltre, egli suppone che il contorno del campo soddisfi a certe condizioni di molto restrittive che impediscono, anche in casi semplici, l'applicazione del teorema. Per tali condizioni, p. es. non è possibile dimostrare che in un campo *non convesso* esiste una minima distanza fra due punti.

prossima Nota, daremo una generalizzazione delle proposizioni accennate sulle poligonalı inscritte in una curva; dimostreremo cio  che, se la curva rettificabile C_1 tende all'altra pure rettificabile C , in modo che la sua lunghezza tenda alla lunghezza di quest'ultima, l'integrale della F esteso alla prima curva tende allo stesso integrale esteso alla seconda.

2. Sia $F(x, y, x', y')$ una funzione finita e continua insieme alle sue derivate parziali dei primi tre ordini, per tutti i punti (x, y) di un dato campo chiuso A e per tutte le coppie (x', y') di numeri finiti *non nulli insieme*. La F sia inoltre *positivamente omogenea* di grado 1, rispetto alle variabili x, y : vale a dire, soddisfi alla relazione

$$F(x, y, Kx', Ky') = KF(x, y, x', y')$$

per ogni $K > 0$. Indicheremo nel seguito con F_1 la funzione definita da

$$F_1(x, y, x', y') = \frac{F_{ax'ax'}}{y'^2} = -\frac{F_{ay'ay'}}{x'^2} = \frac{F_{y'y'}}{x'^2},$$

e che, per le ipotesi fatte sulla F , risulta finita e continua insieme alle sue derivate parziali del primo ordine, per ogni punto (x, y) di A e ogni coppia di numeri (x', y') non ambedue nulli. Sia poi

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad (t^{(0)} \leq t \leq t^{(1)})$$

una curva continua rettificabile, costituita di punti *interni* ad A . Come si sa (teorema di Jordan), la condizione necessaria   sufficiente affinch  la C sia rettificabile   che le funzioni $x(t), y(t)$ siano a variazione limitata.

3. Consideriamo una divisione D dell'intervallo $(t^{(0)}, t^{(1)})$ in parti mediante i punti

$$t^{(0)} = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t^{(1)}$$

e formiamo la sommatoria

$$\begin{aligned} W_D(F) &= \sum_{v=0}^{n-1} F \{ x(t_v), y(t_v), [x(t_{v+1}) - x(t_v)], [y(t_{v+1}) - y(t_v)] \} \\ &= \Sigma F(x_v, y_v, \Delta x_v, \Delta y_v). \end{aligned}$$

Se, al tendere a zero della massima delle differenze $t_{v+1} - t_v$, la somma $W_D(F)$ tende sempre ad uno stesso limite determinato e finito, tal limite   l'integrale di Weierstrass della funzione F , relativo alla curva C ⁽¹⁾. Questo integrale lo indicheremo con $W_c(F)$.

(¹) Si pu  notare che la definizione data per l'integrale di Weierstrass   perfettamente equivalente a quest'altra. Si iscriva nella curva C una poligonale, in modo che risulti tutta interna ad A , e si consideri l'integrale di Riemann della F , esteso ad essa. Se, al tendere a zero del massimo lato della poligonale, quest'integrale ammette limite determinato e finito, tale limite   l'integrale di Weierstrass della funzione F , esteso alla curva C . (Cfr. Osgood, loc. cit.).

4. Sia m_1 il minimo della funzione $F(x, y, x', y')$ per ogni punto (xy) di A e ogni coppia $(x'y')$ soddisfacente alla condizione

$$x'^2 + y'^2 = 1.$$

Analogamente, sia m_2 il minimo della $F_1(x, y, x', y')$ per gli stessi punti (x, y, x', y') . Detto m un numero positivo maggiore del più grande di due valori assoluti $|m_1|, |m_2|$, consideriamo la funzione

$$(1) \quad \bar{F}(x, y, x', y') \equiv F(x, y, x', y') + m \sqrt{x'^2 + y'^2} \quad (1).$$

Essa soddisfa alle stesse condizioni della F ed è

$$\bar{F}_1(x, y, x', y') \equiv F(x, y, x', y') + \frac{m}{(x'^2 + y'^2)^{1/2}}.$$

Abbiamo inoltre per il significato di m

$$\bar{F} > 0, \quad \bar{F}_1 > 0$$

per tutti i punti (x, y) di A e per ogni punto (x', y') della circonferenza $x'^2 + y'^2 = 1$. Con la funzione F siamo dunque nel caso ⁽²⁾ in cui è nota l'esistenza dell'integrale di Weierstrass relativo alla curva C. Abbiamo così che, al tendere a zero della massima delle differenze $t_{v+1} - t_v$, la somma

$$\Sigma \bar{F}(x_v, y_v, \Delta x_v, \Delta y_v)$$

tende sempre ad un limite determinato e finito. La medesima cosa succede relativamente alla funzione $m \sqrt{x'^2 + y'^2}$, che soddisfa alle stesse condizioni della F, vale a dire, esiste anche il limite di $\Sigma m \sqrt{\Delta x_v^2 + \Delta y_v^2}$. Ora è, per la (1),

$$\Sigma F(x_v, y_v, \Delta x_v, \Delta y_v) = \Sigma \bar{F}(x_v, y_v, \Delta x_v, \Delta y_v) - \Sigma m \sqrt{\Delta x_v^2 + \Delta y_v^2}$$

ed esiste perciò, determinato e finito, il limite di $\Sigma F(x_v, y_v, \Delta x_v, \Delta y_v)$ al tendere a zero della massima delle differenze $t_{v+1} - t_v$. Possiamo concludere che

l'integrale di Weierstrass della funzione $F(x, y, x', y')$, calcolato lungo una curva C, esiste sotto la sola condizione che la C sia rettificabile.

Ripetendo un ragionamento da noi già fatto altra volta ⁽³⁾ abbiamo che

l'integrale di Weierstrass è indipendente dalla rappresentazione parametrica della curva C.

(¹) Qui e nel seguito considereremo sempre il valore positivo del radicale.

(²) Cfr. Bolza, loc. cit.; Tonelli (T) § III.

(³) Tonelli (T) n. 16.

5. Poichè le funzioni \bar{F} e $m \sqrt{x'^2 + y'^2}$ soddisfano a tutte le condizioni necessarie per la validità dei risultati da noi ottenuti in (T), possiamo scrivere (applicando il teorema del n. 26). se il parametro t rappresenta la lunghezza dell'arco o, più generalmente, se è tale da rendere le funzioni $x = x(t)$, $y = y(t)$, che rappresentano la curva, *assolutamente continue* ⁽¹⁾:

$$W_c(\bar{F}) = \int_{t(0)}^{t(1)} \bar{F}(x, y, x', y') dt$$

$$W_c(m \sqrt{x'^2 + y'^2}) = \int_{t(0)}^{t(1)} m \sqrt{x'^2 + y'^2} dt.$$

Qui i secondi membri sono degli integrali presi nel senso del Lebesgue; x' , y' rappresentano le derivate di $x(t)$, $y(t)$; dove queste derivate non esistono o sono ambedue nulle, le funzioni da integrare si considerano nulle. Dalle uguaglianze scritte deduciamo l'altra

$$W_c(F) = W_c(\bar{F}) - W_c(m \sqrt{x'^2 + y'^2}) = \int_{t(0)}^{t(1)} F(x, y, x', y') dt$$

Resta dunque dimostrato che

supposta la curva C rettificabile, l'integrale di Weierstrass coincide con quello del Lebesgue, quando questo venga calcolato mediante una rappresentazione della curva, tale che $x(t)$, $y(t)$ risultino assolutamente continue.

Da questo enunciato vengono escluse quelle rappresentazioni della curva per le quali le funzioni $x(t)$, $y(t)$ non sono assolutamente continue: ciò perchè, prendendo a considerare tali rappresentazioni, non si è certi dell'invariabilità dell'integrale della F , preso nel senso del Lebesgue. Anzi è dimostrato che, se la F è sempre di un segno, per es. sempre positiva, e le $x(t)$, $y(t)$ non sono assolutamente continue, è

$$\int_{t(0)}^{t(1)} F[x(t), y(t), x'(t), y'(t)] dt < \int_{s(t_0)}^{s(t_1)} F[x(s), y(s), x'(s), y'(s)] ds:$$

qui s misura l'arco della curva ⁽²⁾.

6. Immaginiamo ora di aver una poligonale P inscritta nella curva C , in modo che i suoi vertici si susseguano sulla curva tutti nello stesso ordine, coincidendo, il primo e l'ultimo, con gli estremi della curva stessa. Supponiamo che i lati della poligonale siano abbastanza piccoli da risultare tutti interni al campo A , e consideriamo l'integrale della F

$$(2) \quad \int_P F(x, y, x', y') ds,$$

⁽¹⁾ Per la definizione di funzioni *assolutamente continue*, vedi G. Vitali: *Sulle funzioni integrali* (Atti R. Accad. delle scienze di Torino, 1904-05).

⁽²⁾ Vedi per tutto ciò: Tonelli, *Sugli integrali curvilinei*. (Rend. Accad. dei Lincei, febbraio 1911).

preso nel senso del Lebesgue (o del Riemann), ed esteso alla poligonale e riferito ad una rappresentazione di questa in funzione della lunghezza dell'arco.

L'Osgood ⁽¹⁾ ha dimostrato che, al tendere a zero del massimo lato della poligonale, tale integrale tende a quello di Weierstrass $W_c(F)$, esteso alla C , quando quest'ultimo esiste. E poichè l'esistenza di $W_c(F)$ è già stata da noi dimostrata, abbiamo, per il risultato del n. precedente, che *al tendere a zero del massimo lato della poligonale P , inscritta nella curva, l'integrale (2) della F , esteso a questa poligonale, tende a quello*

$$\int_C F(x, y, x', y') ds$$

esteso alla curva C .

Matematica. — *Sulle superficie algebriche contenenti due fasci ellittici di curve.* Nota di RUGGIERO TORELLI, presentata dal Corresp. F. SEVERI.

In questa Nota dimostro, con semplici considerazioni geometriche, i seguenti due teoremi:

I. *Se una superficie possiede DUE fasci ellittici di curve irriducibili, i quali sieno in corrispondenza unirazionale fra loro, essa ne possiede INFINITI.*

Il teorema si estende alle varietà superiori.

II. *Se una curva di genere >1 possiede DUE involuzioni ellittiche non composte, le quali sieno in corrispondenza unirazionale fra loro, essa ne possiede INFINITE.*

Aggiungo poi alcune semplici osservazioni in proposito; in un prossimo lavoro tornerò sull'argomento.

1. Sia F una superficie contenente due fasci ellittici Σ, Σ' di curve C, C' , non composti con uno stesso fascio; e supponiamo che Σ, Σ' siano birazionalmente identici.

La geometria su una curva ellittica ci insegna ⁽²⁾ che si possono (in infiniti modi) determinare 2 o 4 o 6 (secondo che gli enti ellittici Σ, Σ' siano non singolari, armonici o equianarmonici) corrispondenze birazionali T_i ($i = 1, 2$ o $1, \dots, 4$ o $1, \dots, 6$) fra Σ, Σ' , tali che ogni corrispondenza birazionale esistente fra Σ, Σ' sia prodotto di una T_i per una corrispondenza

⁽¹⁾ loc. cit., pag. 293.

⁽²⁾ Cfr. Segre, *Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche* [Atti Acc. Torino, vol. XXIV (1889)].

di 1^a specie di Σ' in sè. Talchè, detta ω una, variabile, di queste ultime corrispondenze, tutte le corrispondenze fra Σ, Σ' si ripartiscono in 2 o 4 o 6 sistemi $T_i\omega$, biraz. identici a Σ, Σ' ; due sistemi diversi non hanno mai una corrisp. a comune; due corrisp. di uno stesso sistema non hanno mai a comune una coppia di elementi omologhi.

Orbene, si consideri una coppia variabile di curve C, C' omologhe in una corrisp. $T_i\omega$; esse si incontrano in un gruppo di punti che descrive una curva (eventualmente riducibile) $K_{i\omega}$. Questa, al variar di ω , descrive un fascio S_i bir. identico a Σ, Σ' : poichè, se ω' è un'altra corrisp. di prima specie di Σ' in sè, le corrisp. $T_i\omega, T_i\omega'$ non hanno coppie comuni, e quindi le curve $K_{i\omega}, K_{i\omega'}$ non hanno punti comuni.

Il fascio S_i e Σ (o Σ') non possono evidentemente essere composti con uno stesso fascio: ma vediamo anche facilmente che lo stesso può dirsi dei due fasci $S_i, S_{i'}$. Se infatti esistesse un fascio di curve γ , ognuna delle quali fondamentale per S_i e per $S_{i'}$, la generica γ (non sarebbe certo fondamentale per Σ nè per Σ') e sarebbe parte di una $K_{i\omega}$ e di una $K_{i'\omega'}$ ($\omega \neq \omega'$); ma allora le infinite coppie di curve C, C' uscenti dai suoi punti sarebbero omologhe nella $T_i\omega$ e nella $T_{i'}\omega'$, che perciò coinciderebbero: il che è assurdo.

Riassumendo: i due fasci Σ, Σ' generano, nel modo suesposto, altri 2 o 4 o 6 NUOVI fasci S_i , bir. identici a Σ, Σ' .

2. Nelle considerazioni precedenti non si esclude che uno o ciascuno dei fasci Σ, Σ' sia composto. Ma allora prendiamo entro Σ, Σ' due involuzioni ellittiche I, I' , bir. identiche fra loro (e ciò si può in infiniti modi ⁽¹⁾): anche i fasci I, I' genereranno a lor volta 2 o 4 o 6 fasci ellittici.

Ora domandiamoci: un fascio Φ , generato da una coppia di involuzioni I, I' , e un fascio Φ_1 , generato da un'altra coppia I_1, I'_1 , possono essere composti con uno stesso fascio? È assai agevole riconoscere quando ciò avviene; ma per brevità io qui mi limiterò a dimostrare che alla precedente domanda va risposto negativamente, se una delle involuzioni I, I' e una delle I_1, I'_1 sono di 1° ordine ⁽²⁾. E per questo, analogamente a quanto si è fatto in fine del n. 1, basterà mostrare che non può esistere una curva γ , non fondamentale per Σ , faciente parte di una curva, K , di Φ e di una, K_1 , di Φ_1 . Ed infatti la curva K sarà generata, nel modo esposto al n. 1, da una corrispondenza biunivoca fra I, I' , la quale può, per l'ipotesi fatta, riguardarsi come una corrispondenza unirazionale Θ fra Σ, Σ' ; e similmente la K_1 sarà generata da un'altra corrisp. unirazionale Θ_1 fra Σ, Σ' . Ora, se

⁽¹⁾ Cfr. Castelnuovo, *Geometria sulle curve ellittiche* [Atti Acc. Torino, vol. XXIV (1889)].

⁽²⁾ Sono costituite cioè dai singoli elementi degli enti sostegni Σ o Σ' . Con questa limitazione della ricerca non vediamo quali siano tutti i fasci deducibili, col nostro metodo, da Σ, Σ' : ma ciò, per dimostrare i teoremi enunciati in prefazione, non importa.

esistesse la suddetta curva γ , le infinite coppie di curve C, C' uscenti dai suoi punti sarebbero omologhe sia in Θ che in Θ_1 : il che è assurdo, poichè le corrisp. Θ, Θ_1 sono *irriducibili*. Ciò prova l'asserto.

Poichè in Σ (e in Σ') esistono, notoriamente ⁽¹⁾, infinite involuzioni bir. identiche a Σ, Σ' , quanto abbiamo or ora dimostrato basta già a farci concludere che: *su una superficie F contenente due fasci ellittici bir. identici, non composti con uno stesso, esistono infiniti fasci ellittici irriducibili*.

Dalle considerazioni svolte discende subito il teorema I della prefazione.

3. L'estensione del teorema I a una varietà ∞^k ($k > 2$) può farsi con semplici cambiamenti di parole. Ma si può pure, come mi ha fatto rilevare il prof. Severi, procedere, più elegantemente, così. Se una varietà ∞^k , V_k , possiede due fasci ellittici irriducibili Σ, Σ' di varietà ∞^{k-1} , V, V' , prese due curve ellittiche Γ, Γ' bir. identiche a Σ, Σ' , la V_k risulta in corrispondenza unirazionale colla superficie F delle coppie di punti di Γ, Γ' ; ai punti di F corrispondendo le V_{k-2} comuni a una V e a una V' . Ora, se Σ, Σ' si possono mettere in corrispondenza unirazionale fra loro, F contiene, per il teorema I, infiniti fasci ellittici irriducibili di curve; quindi la V_k conterrà infiniti fasci ellittici irriducibili di V_{k-1} , c. d. d.

4. Per dimostrare il teorema II premettiamo tre lemmi, la cui dimostrazione, immediata dal punto di vista trascendente, può pure condursi per via geometrica nel seguente modo.

a) Se una curva C (di genere > 1) possiede una involuzione ellittica I , la varietà V_i delle i -ple ($i > 1$) di punti di C possiede un fascio Σ di V_{i-1} , bir. identico a I . Si prenda infatti nell'ente $\infty^1 I$ una g_i^{i-1} ; e in ciascuno dei gruppi di I che formano un gruppo variabile di tal g_i^{i-1} si prenda arbitrariamente un punto. Si ottengono così un certo numero di gruppi di i punti, e tali gruppi variano in una serie ∞^{i-1} , ossia in una V_{i-1} di V_i . Al variare della suddetta g_i^{i-1} , tal V_{i-1} descrive il fascio Σ , di cui parla l'enunciato.

b) Inversamente: se V_i contiene un fascio ellittico Σ di V_{i-1} , questo può immaginarsi ottenuto, nel modo anzidetto, da una certa involuzione ellittica I di C . Preso infatti su C un gruppo di $i-1$ punti, i residui di esso rispetto alla serie immagine di una V_{i-1} variabile di Σ costituiscono un gruppo, che descrive appunto, com'è facile vedere, la involuzione I di cui parla l'enunciato.

Infine si può vedere, con considerazioni semplicissime, che:

c) Se l'involuzione I è composta, il fascio Σ è riducibile; e viceversa.

Dopo ciò, dal teorema I e dai precedenti lemmi a), b), c) discende senz'altro il teorema II della prefazione.

(1) Cfr. Castelnuovo, loc. cit.

Osserverò che il teorema II potrebbe anche dimostrarsi costruendo sulla curva C le infinite involuzioni di cui esso parla, con l'identico metodo da noi usato pei fasci su una superficie. Non entro qui in dettagli, per mancanza di spazio.

5. Il prof. Severi, cui comunicai le presenti considerazioni, mi fece anche rilevare una semplicissima dimostrazione trascendente del teorema I, enunciato per una varietà V_k , di dimensione qualunque $k \geq 1$. Eccola.

Se V_k possiede due fasci (involuzioni, per $k = 1$) ellittici bir. identici, non composti con uno stesso, questi daranno luogo a due integrali semplici di 1^a specie, u, v , di V_k , riducibili a integrali ellittici. Riducendo a forma normale i loro periodi, si otterrà la tabella:

$$v \begin{vmatrix} 1 & 0 & \tau & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \tau \end{vmatrix}$$

e quindi ogni integrale del tipo $\lambda u + \mu v$, con λ, μ interi non nulli, sarà anche riducibile a ellittico: poichè i suoi periodi si esprimono come combinazioni lineari a coefficienti interi di $1, \tau$. Ne viene che le varietà $\lambda u + \mu v = \text{cost.}$ sono algebriche, e costituiscono un fascio ellittico: diciamo Σ'' questo fascio, se irriducibile, o, se no, il fascio irriducibile con cui esso è composto. Si ottengono così, al variare di λ, μ , infiniti fasci irriducibili distinti fra loro e da Σ, Σ' : poichè se, per es., Σ'' coincidesse con Σ' , dovrebbero $\lambda u + \mu v$ e v differire per un fattore costante, e quindi sarebbe $\lambda = 0$ ⁽¹⁾.

6. A complemento dei teoremi dimostrati aggiungiamo quanto segue.

Se una varietà V_k ($k \geq 1$) possiede due fasci ellittici Σ, Σ' di varietà V_{k-1}, V'_{k-1} , non composti con uno stesso, ed essi non si possono mettere in corrispondenza unirazionale fra loro, qualunque corrispondenza algebrica fra Σ, Σ' sarà a valenza zero. ⁽²⁾.

Ne segue, se $k > 1$, che: presa comunque una curva γ di V_k , non fondamentale per Σ , nè per Σ' , l'insieme delle V'_{k-1} (σV_{k-1}) passanti pei punti in cui γ incontra una V_{k-1} ($\sigma V'_{k-1}$) variabile, varia in un sistema lineare.

E, se $k = 1$, che: l'insieme dei gruppi dell'involuzione Σ (o Σ') uscenti dai punti di un gruppo variabile di Σ' (o Σ), varia in una serie lineare; epperò ⁽³⁾ le due involuzioni hanno

$$nm' + 1 = P$$

⁽¹⁾ Pel caso in cui V_k sia una curva di genere due, cfr. Krazer, *Lehrbuch der Thetafunktionen* [Teubner, 1903], pag. 489.

⁽²⁾ Cfr. Castelnuovo, loc. cit., n. 17.

⁽³⁾ Cfr. Amodeo, *Contribuzione alla teoria delle serie irrazionali*, etc. [Ann. di Mat., s. 2, t. XX], n. 17.

coppie comuni: n, n' indicando i loro ordini, p il genere della curva sostegno.

7. Terminerò con una osservazione. Nella costruzione di tutti i fasci ellittici esistenti su una V_h che ne contenga 2, bir. identici, si presenta la questione: *quali sono su una curva ellittica C le involuzioni bir. identiche a essa?* Si sa che per ogni valore dell'intero n ne esiste una, H_{n^2} , di ordine n^2 , la quale è costituita dai gruppi dei punti n -pli (pensati ciascuno una volta) delle g_{n-1}^n di C . Orbene: io dimostrerò che *se su C esistono solo corrispondenze a valenza (e solo allora) le dette H_{n^2} sono le sole involuzioni bir. identiche a C* . Sia infatti I_m una involuzione di ordine m , bir. identica a C ; e fissiamo una corrisp. biunivoca fra C e I_m : essa può riguardarsi come una corrispondenza T , di indici 1. m , fra i punti di C ; e come tale avrà, per ipotesi, una certa valenza $\nu \geq 0$. Poniamo $n = |\nu|$; diciamo P, P_i ($i = 1, 2, \dots$) punti di C ; G, G_i i loro gruppi omologhi; sarà:

$$(1) \quad \nu P + G \equiv \nu P_i + G_i.$$

Fissati ora P e G , esistono $n^2 - 1$ (e solo $n^2 - 1$) punti P_i tali che:

$$(2) \quad nP \equiv nP_i;$$

ed esistono ⁽¹⁾ $m - 1$ (e solo $m - 1$) gruppi G_i , tali che

$$(3) \quad G \equiv G_i.$$

Poichè le relazioni (2) e (3) sono, in virtù della (1), fra loro equivalenti, segue $m = n^2$. Se poi sono $A_1 A_2 \dots A_{n^2}$ i punti di G , si ha (considerando la T^{-1}):

$$\nu A_1 + P \equiv \nu A_2 + P \equiv \dots \equiv \nu A_{n^2} + P,$$

quindi anche:

$$n A_1 \equiv n A_2 \equiv \dots \equiv n A_{n^2};$$

ma dunque la I_m coincide colla H_{n^2} , c. d. d.

Se C possiede corrisp. singolari (per es. se è armonica o equianarmonica), esistono, oltre le dette H_{n^2} , altre involuzioni bir. identiche a C : come può facilmente dimostrarsi per via trascendente ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Cfr. per es. la mia Nota *Sulle curve di genere due* ecc. [Rend. Soc. Reale di Napoli, 1911], n. 1.

⁽²⁾ Per un esempio cfr. Severi, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica* ecc. [Mem. Acc. Torino, t. LIV (1904)], n. 24. Cfr. anche Segre, loc. cit.

Matematica. — *Sopra le deformazioni continue delle superficie reali applicabili sul paraboloide a parametro puramente immaginario.* Nota di L. P. EISENHART, presentata dal Socio L. BIANCHI.

In una recente Memoria ⁽¹⁾ il prof. Bianchi ha portato un importante contributo alla teoria delle superficie a curvatura costante negativa stabilendo l'esistenza di una nuova classe di deformazioni continue di tali superficie e mostrando che un sistema, il quale consiste di ∞^1 di queste deformate, possiede delle trasformazioni di Bäcklund in sistemi della stessa specie, affatto analogamente come i sistemi di Weingarten di superficie pseudosferiche. In seguito ⁽²⁾ egli sviluppò una teoria simile per superficie a curvatura costante in geometria ellittica ed iperbolica. È noto ⁽³⁾ che, quando si applica il metodo di Weingarten ad una superficie pseudosferica in geometria ellittica, si ottiene per quadrature una superficie nello spazio euclideo, che è applicabile sul paraboloide

$$(1) \quad x^2 + \frac{y^2}{a^2} + 2iz = 0$$

con parametro puramente immaginario. L'A. ha dimostrato che questa trasformazione ottenuta col metodo di Weingarten può essere estesa in modo da venire applicata alle superficie di un sistema (Σ) in geometria ellittica, quale è stato definito dal prof. Bianchi nella sua Memoria B, e con questo mezzo egli ha stabilito l'esistenza di un'analogia teoria di trasformazioni continue di superficie applicabili sul paraboloide (1). In questa Nota verranno esposti soltanto i risultati di questa ricerca. Anzitutto noi richiamiamo alcune formule dalla Memoria B.

Sia S una superficie pseudosferica di curvatura assoluta K e di curvatura relativa $-\frac{1}{a^2}$, riferita ad un sistema ortogonale (u, v) , per cui il suo elemento lineare prende la forma

$$(2) \quad ds^2 = edu^2 + gdv^2.$$

Riferendo i punti dello spazio ellittico ad un sistema di coordinate di

⁽¹⁾ *Sopra una classe di deformazioni continue delle superficie pseudosferiche.* Annali di Matematica, serie III, tomo XVIII (1911), pag. 1 e sgg.

⁽²⁾ *Sopra le deformazioni isogonali delle superficie a curvatura costante in geometria ellittica ed iperbolica.* Annali, serie III, tomo XVIII (1911), pag. 185 e sgg.

⁽³⁾ *Ricerche sulla deformazione delle quadriche.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo XXII (1906), pag. 3.

Weierstrass, noi indichiamo con x_0, x_1, x_2, x_3 le coordinate di un punto $F \equiv (u, v)$ mobile su S , e rappresentiamo con

$$(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3), (\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3), (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

i coseni di direzione delle tangenti alle curve $v = \text{cost}$, $u = \text{cost}$ su S e della normale ad S in F ; questi sono cioè le coordinate di Weierstrass dei piani del triedro parametrico. I coseni di direzione di una retta per F , che formi l'angolo costante α col piano tangente hanno la forma

$$(3) \quad \xi'_i = \cos \alpha \sin \varphi \cdot \eta_i - \cos \alpha \cos \varphi \zeta_i + \sin \alpha \xi_i, \quad (i = 0, 1, 2, 3),$$

dove $\varphi(u, v)$ indica l'angolo che la normale a questa linea, giacente nel piano tangente, forma colla tangente alla curva $v = \text{cost}$. È dimostrato che la condizione necessaria e sufficiente affinchè la S ammetta una deformazione infinitesima per la quale il punto F sia spostato nella direzione (3) della distanza εh , dove ε è una costante infinitesima, è che h e φ soddisfacciano le equazioni differenziali

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sqrt{e} \left\{ \cos \varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} \right) + \sin \varphi \frac{\partial \log h}{\partial v} \right\} - \\ & - \sqrt{g} \left\{ \sin \varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} \right) - \cos \varphi \frac{\partial \log h}{\partial u} \right\} + 2 \cot \tau \sqrt{eg} = 0 \\ & \frac{\partial \log h}{\partial v} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} \right) - \frac{\partial \log h}{\partial u} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} \right) = h \sqrt{eg}. \end{aligned} \right.$$

Inoltre, queste funzioni stanno nelle relazioni seguenti coi secondi coefficienti fondamentali D, D', D'' di S :

$$(5) \quad D = \sqrt{e} \cot \alpha \left\{ \cos \varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} \right) + \sin \varphi \frac{\partial \log h}{\partial u} \right\}$$

e si hanno espressioni simili per D' e D'' ; queste espressioni soddisfanno le equazioni di Codazzi e di Gauss in virtù delle (4).

Per di più la linea nel piano tangente ad S in F , la quale è perpendicolare alla direzione (3), definisce una trasformazione di Bäcklund di S in una superficie S' , la cui normale nel punto di contatto F ha la direzione (3), e le cui coordinate sono date da

$$(6) \quad x'_i = \cos \tau \cdot x_i + \sin \tau (\eta_i \cos \varphi + \zeta_i \sin \varphi) \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Affinchè la deformazione sia continua, le funzioni $D, D', D''; h, \varphi; x, \eta, \zeta, \xi$ debbono contenere un parametro w , tale che sussistano le equazioni

$$(7) \quad \frac{\partial x_i}{\partial u} = \sqrt{e} \eta_i, \quad \frac{\partial x_i}{\partial v} = \sqrt{g} \zeta_i, \quad \frac{\partial x_i}{\partial w} = h \xi'_i \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

La condizione necessaria e sufficiente a ciò è che, oltre alle equazioni (4), siano soddisfatte anche le seguenti

$$(8) \quad \operatorname{sen} \alpha \frac{\partial A}{\partial w} = h_{11} + keh, \quad \operatorname{sen} \alpha \frac{\partial A'}{\partial w} = h_{12} + kfh, \quad \operatorname{sen} \alpha \frac{\partial A''}{\partial w} = h_{22} + kgh,$$

che sono scritte in forma invariante. Quando queste condizioni sono soddisfatte, le equazioni (7) definiscono un sistema triplo di superficie in geometria ellittica tale che ciascuna delle superficie $w = \text{cost}$ è una deformata continua delle altre. Noi diciamo che le equazioni (7) definiscono *un sistema di Bianchi*. Nello stesso tempo le equazioni (6) definiscono un secondo sistema di Bianchi, che noi chiamiamo *il sistema coniugato*. Questa relazione è reciproca, cioè il sistema (7) è il coniugato del sistema ottenuto per mezzo della (6) ⁽¹⁾.

Quando il metodo di Weingarten viene applicato ad una superficie pseudosferica S in geometria ellittica, si trova una superficie reale Σ nello spazio euclideo, le cui coordinate sono date da

$$(9) \quad dy_i = x_i dx_0 + a^2 \xi_i d\xi_0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

la quale è applicabile sul paraboloide (1), come si dimostra ponendo

$$x = x_0, \quad y = a^2 \xi_0, \quad z = i \frac{x_0^2 + a^2 \xi_0^2}{2}.$$

Noi diciamo che le equazioni (9) definiscono una *trasformazione W*. I coseni di direzione della normale a Σ sono proporzionali alle quantità A_i definite da

$$(10) \quad A_i = \xi_i \eta_0 - \eta_i \xi_0$$

Sarà necessario definire due altre funzioni β e γ come segue

$$(11) \quad \begin{aligned} \beta &= -\operatorname{sen} \tau x_0 + \cos \tau (\cos \varphi \eta_0 + \operatorname{sen} \varphi \xi_0) \\ \gamma &= \frac{\operatorname{sen} \tau}{a} \xi_0 - \operatorname{sen} \alpha (\operatorname{sen} \varphi \eta_0 - \cos \varphi \xi_0) \end{aligned}$$

Coll'aiuto di queste noi stabiliamo il teorema:

Se Σ è la trasformata W d'una superficie S , la superficie Σ' le cui coordinate sono date da

$$(12) \quad y'_i = y_i + \operatorname{sen} \tau (\beta x_i - a \gamma \xi_i)$$

è la trasformata W della superficie S' che origina da S mediante la trasformazione di Bäcklund determinata dalle stesse funzioni α, τ, h, φ ; e le superficie Σ e Σ' sono le superficie focali d'una congruenza W.

Affine di giungere a questo risultato noi effettuiamo un cambiamento di parametri per S' cosicchè i piani del triedro parametrico debbono avere

⁽¹⁾ Il prof. Bianchi dice che in questo caso il secondo sistema è ottenuto dal primo con una *trasformazione singolare*.

una orientazione conveniente. Il carattere di questa scelta verrà spiegato in seguito.

Quando noi consideriamo non una superficie isolata S , ma un sistema di Bianchi, noi troviamo che esiste una trasformazione W generalizzata, tale che le superficie trasformate Σ sono trasformate continue l'una dell'altra. Questo risultato può essere espresso nel modo seguente:

Quando si ha un sistema di Bianchi di superficie pseudosferiche in geometria ellittica, determinato da un insieme di funzioni h, φ, τ ed α , soddisfacenti le equazioni (4), (5), (8), e le funzioni A'_i per il sistema coniugato di Bianchi sono determinate concordemente colla corrispondente affinità di Ivory le equazioni

$$(13) \quad dy_i = x_i dx_0 + a^2 \xi_i d\xi_0 - ah \operatorname{sen} \alpha A'_i dw$$

sussistono e definiscono nello spazio euclideo un sistema di superficie $\Sigma(w = \text{cost})$, le quali sono deformate continue l'una dell'altra, e ciascuna superficie Σ è applicabile sul paraboloide (1); inoltre, le superficie Σ' definite da (12) formano un secondo sistema della medesima specie.

Noi denominiamo questo secondo sistema il coniugato del primo.

Quando nelle equazioni (6) le quantità α, h, φ, τ sono sostituite da un secondo gruppo $\alpha_1, h_1, \varphi_1, \tau_1$ soddisfacente le equazioni (4), (5), (8), queste equazioni definiscono una nuova trasformazione β_α delle superficie S . Inoltre, come il prof. Bianchi ha dimostrato, le trasformate S' formano un sistema di Bianchi. Noi abbiamo stabilito gli analoghi risultati:

Quando si applica al sistema (13) di superficie Σ una trasformazione definita da equazioni del tipo (12), nel quale α, h, φ, τ sono sostituite da $\alpha_1, h_1, \varphi_1, \tau_1$, le superficie risultanti Σ' sono tali che ciascun gruppo di superficie corrispondenti $\Sigma, \Sigma', \bar{\Sigma}, \bar{\Sigma}'$ formano una quaterna in accordo con un teorema di permutabilità per trasformazioni (13).

Per queste trasformazioni generali e per la singolare pertinente al sistema coniugato, le coordinate y'_i soddisfano equazioni della forma

$$(14) \quad dy'_i = x'_i dx'_0 + a^2 \xi'_i d\xi'_0 - ah' \operatorname{sen} \alpha \bar{A}_i dw$$

dove x' e ξ' sono dati dalle corrispondenti equazioni (6), (3), la funzione h'^2 è il coefficiente di dw^2 nella espressione per l'elemento lineare del sistema (S') e le funzioni \bar{A}_i appartengono al sistema coniugato di superficie e sono determinate dalla corrispondente affinità di Ivory.

In aggiunta a queste trasformazioni dei sistemi di Bianchi, il professore Bianchi ha stabilito anche una trasformazione complementare ottenuta conducendo le tangenti ad un sistema di geodetiche ortogonali ad una famiglia di oricicli. Per queste trasformazioni un sistema di Bianchi è cangiato in un nuovo sistema della medesima specie. Per queste trasformazioni ab-

biamo anche un teorema analogo all'ultimo, ma in questo caso la determinazione delle funzioni \bar{A}_i richiede quadrature. Particolare interesse ha il caso di $k = 0$, vale a dire quando le superficie S sono applicabili sulla superficie di Clifford.

Nello spazio euclideo le superficie Σ sono applicabili sul paraboloide di rotazione

$$(15) \quad x^2 + y^2 + 2iz = 0$$

e conseguentemente ciascuna è una falda focale di una superficie del tipo scoperto da Weingarten nel 1861.

Ricordiamo che Darboux ha dimostrato che la superficie media è una superficie di traslazione, con curve generatrici a torsione costante eguale e di segno contrario, e che i piani osculatori di queste curve s'intersecano nelle normali corrispondenti alle superficie di Weingarten. Noi abbiamo stabilito il risultato seguente:

La condizione necessaria e sufficiente perchè la trasformazione (12) di una superficie Σ sia complementare, è che Σ sia applicabile sul paraboloide (15) è che la corrispondente trasformazione di S in geometria ellittica sia complementare; un sistema di Bianchi di superficie applicabili sopra la superficie di Clifford corrisponde per trasformazione W ad un sistema di superficie Σ applicabili sul paraboloide (15); l'ultimo sistema ammette una trasformazione complementare in sistemi della medesima specie, in modo che ciascuna coppia di superficie Σ, Σ' sono le superficie focali di superficie di Weingarten.

L'autore ha stabilito con metodo diretto l'esistenza di sistemi di deformazioni continue del paraboloide reale, e si occupa ora di ricerche analoghe concernenti le superficie applicabili nelle quadriche a centro.

Fisica. — *Sulla costante di trasformazione del Radio D (1).*

Nota del dott. PAOLO ROSSI, presentata dal Corrisp. M. CANTONE.

Il Radio D non si mostra radioattivo per sè stesso, ma si sa che, una volta raggiunto l'equilibrio radioattivo dei suoi prodotti di trasformazione, tanto l'attività dei raggi β quanto quella dei raggi α — dovute rispettivamente al Radio E ed F — devono decrescere colla stessa legge esponenziale e precisamente con quella che caratterizza la trasformazione del Radio D (2). Siccome però questa avviene molto lentamente, così finora si preferito dai diversi autori di determinarne il periodo con metodi indiretti

(1) Lavoro eseguito nella R. Università di Napoli.

(2) M.^{me} Curie, *Radioactivité*, tom. II, pag. 373.

basati su talune ipotesi che si ritengono verificate con una certa approssimazione.

Il Rutherford (¹) fu il primo che suggerì ed attuò un metodo siffatto che consisteva nel confrontare l'attività β del Radio C con quella del Radio E proveniente dal primo ed in equilibrio radioattivo col Radio D. Questo metodo si fonda essenzialmente su due ipotesi: 1°, che nella disintegrazione di ciascun atomo radioattivo vi sia emissione di un sol corpuscolo; 2°, che ognuno di questi corpuscoli, sia esso proveniente dal Radio C o dal Radio E, produca lo stesso effetto ionizzante in un dato apparecchio di misura. Con questo metodo il Rutherford trovò un periodo caratteristico di circa 40 anni per la mezza trasformazione del Radio D, ma egli non escluse che il vero periodo potesse differire notevolmente, poichè lo stesso principio applicato alla determinazione indiretta del periodo del Radio F darebbe un anno circa, mentre l'autore stesso col metodo diretto trovò pel Radio F un periodo di 143 giorni (²).

Più tardi Meyer e Schweidler (³), seguendo lo stesso metodo del Rutherford, trovarono un periodo per il Radio D di anni 35,7, periodo stimato dagli autori stessi troppo grande se si tiene conto del fatto che l'effetto ionizzante dei raggi β del Radio E non può ritenersi uguale a quello dei raggi β del Radio C, essendo i primi considerevolmente meno penetranti di questi ultimi. Meyer e Schweidler adottarono perciò un metodo analogo basato sul confronto dell'attività α iniziale del Radio C con quella del Radio F dopo un intervallo di tempo noto: ottennero così un periodo caratteristico del Radio D di 24 anni; ma tenuto conto del diverso potere ionizzante delle due specie di raggi α emessi dal Radio C e dal Radio F, gli autori stessi pervennero a stabilire un periodo assai vicino a 12 anni.

Infine Antonoff (⁴), per rendersi indipendente dalla seconda ipotesi del Rutherford circa l'eguale effetto ionizzante di ciascuna particella emessa da sostanze radioattive diverse, ricorse all'effetto di scintillazione per la misura del numero delle particelle α emesse dal Radio F proveniente da una quantità nota di emanazione dopo un intervallo di tempo pure noto, e trovò come media di cinque determinazioni il periodo di anni 16 e mezzo.

Per quanto il metodo seguito dall'Antonoff sfugga alle gravi obiezioni che si potevano opporre ai metodi precedenti, e quindi il suo risultato sia senza dubbio il più attendibile, tuttavia questo risultato aspetta una conferma da una determinazione diretta.

Ora un esame diretto del decrescere dell'attività del Radio E ed F in equilibrio radioattivo con una determinata quantità di Radio D non è suffi-

(¹) *Radioactivity*, II ed. (1906), pag. 405, ed anche *Phil. Mag.*, vol. 8, pag. 636 (1904).

(²) Rutherford, *Radioactive Transformations*, pag. 133, New York (1906).

(³) *Phys. Zeitschr.*, VIII, pag. 437 (1907).

(⁴) *Phil. Mag.*, ser. VI, vol. 19, pp. 832 e segg. (1910).

ciente a dare un valore esatto del periodo di trasformazione se non dopo un tempo molto lungo; esso permette però di assegnare dopo qualche anno un valore approssimato che offra il vantaggio, su quelli dati finora, di essere affatto indipendente dalle ipotesi a cui si debbono appoggiare i metodi indiretti.

Già io ho accennato in una precedente pubblicazione ⁽¹⁾ come, seguendo il decrescere dell'attività β della cotunnite vesuviana radioattiva, si poteva tentare una determinazione diretta della costante di trasformazione del Radio D, in quanto che le sostanze che rendono attivo questo minerale sono esclusivamente il Radio D e derivati, come risulta dall'esame radioattivo da me fatto ⁽²⁾ sulla cotunnite formata nel 1907.

Nella prima Nota citata, poi, aggiungevo che fino da allora (1910) potevo asserire che il periodo del Radio D, risultante dall'esame diretto, doveva trovarsi più vicino al periodo dato dall'Antonoff che non agli altri.

Credo ora che i dati di cui dispongo, se non sono sufficienti a dare del periodo in questione un valore così sicuro da potersi assumere come il risultato definitivo della determinazione diretta, permettono almeno di assegnare un periodo che non può essere molto diverso dal vero.

Per l'esame dell'attività del minerale mi sono servito dell'azione ionizzante dei soli raggi β del Radio E, per due ragioni: 1°, perchè quella dei raggi α varia in modo troppo sensibile col variare anche di poco la distanza del preparato dalla camera di ionizzazione dello strumento di misura (elettroscopio tipo Wilson), e ciò avrebbe reso più difficile e meno sicuro il confronto delle attività in epoche diverse; 2°, perchè il Radio F non aveva ancora raggiunto l'equilibrio radioattivo all'inizio delle determinazioni (vedi la mia Nota citata del 1910).

Il preparato in esame consisteva in un grammo di cotunnite del 1907 polverizzata e disposta in strato uniforme in un recipiente di forma cilindrica; esso veniva situato, per l'esame, sempre alla distanza di 18 mm. sotto la camera di ionizzazione chiusa inferiormente da una lamina di alluminio di 0,1 mm. di spessore.

Per il confronto dell'attività nelle diverse epoche ho cercato di riottenere ogni volta le identiche condizioni per la misura, dando la stessa carica iniziale all'elettroscopio e non modificando da una volta all'altra il dispositivo per le osservazioni; per controllare poi la costanza dell'apparecchio di misura, mi sono riferito all'attività β di una quantità di ossido di uranio ⁽³⁾, preso come campione, il cui effetto ionizzante era inizialmente uguale a quello della cotunnite in esame.

Mi sono così accorto che non riuscivo ad ottenere ogni volta rigorosamente le stesse condizioni, avendo valori dell'attività un po' diversi non

⁽¹⁾ Rend. Accad. Lincei, vol. XIX, 2° sem., 1910, pag. 582. Nota.

⁽²⁾ Rend. Accad. Lincei, vol. XIV, 2° sem., 1907, pag. 630.

⁽³⁾ Quasi 1 gr., ma presentante minor superficie e maggior spessore della cotunnite.

soltanto per la cotunnite, ma anche per il campione di ossido di uranio; il che in parte può essere dovuto all'influenza che esercita la temperatura sulla elasticità della fogliolina ma, sopra tutto, credo, alle deformazioni che questa presenta e che possono essere un poco diverse da una volta all'altra: può infatti verificarsi che la fogliolina nella sua caduta non si mantenga nel piano coniugato del micrometro oculare, ed allora viene a mancare un poco la nettezza e varia l'ingrandimento. Si aggiungano a queste cause di incertezza la notevole influenza che ha la posizione della sostanza in esame rispetto alla camera di ionizzazione, e quella che può avere, sulla correzione relativa alla dispersione spontanea, il fatto che questa varia talora in modo sensibilissimo anche da un'ora all'altra.

Data la grave difficoltà di riottenere ogni volta condizioni identiche per le osservazioni, ho preferito misurare l'attività del minerale nelle diverse epoche, riferendola al campione di ossido di uranio; il che è lecito fare, poichè l'aumento di attività che il campione stesso può subire per la lenta e continua produzione di Radio ⁽¹⁾ è inferiore agli inevitabili errori che in questo genere di misure sono relativamente grandi (dell'1% ed anche più). In ogni modo, un piccolo aumento dell'attività del campione importerebbe una diminuzione apparente del periodo della sostanza in esame: cioè, il valore che ne risulta starebbe a rappresentare un limite inferiore non lontano dal periodo vero della sostanza.

Nella tabella I sono riportati i valori dell'attività β della cotunnite riferiti al campione di ossido di uranio, ed il tempo, in mesi, dalla prima determinazione.

TABELLA I.

N.	t mesi	Attività relativa		Diff.
		Osservaz.	Calc.	
1 ^a	0	1.000	0.989	+ 0.011
2 ^a	5	0.972	0.972	+ 00
3 ^a	6	0.951	0.969	— 18
4 ^a	8	0.967	0.962	+ 05
5 ^a	8.4	0.946	0.961	— 15
6 ^a	10	0.958	0.956	+ 02
7 ^a	10.7	0.940	0.954	— 14
8 ^a	12.8	0.947	0.946	+ 01
9 ^a	13.3	0.948	0.945	+ 03
10 ^a	15.5	0.954	0.938	+ 16
11 ^a	17.4	0.946	0.932	+ 14
12 ^a	22.8	0.909	0.915	— 06
13 ^a	28.7	0.895	0.896	— 01
14 ^a	31.6	0.892	0.887	+ 05
15 ^a	34.6	0.890	0.878	+ 12
16 ^a	36	0.878	0.874	+ 04
17 ^a	42	0.840	0.856	— 16
18 ^a	46	0.836	0.845	— 09
19 ^a	48.5	0.848	0.838	+ 10

(¹) Fr. Soddy, Phil. Mag., VI, vol. 18, pag. 846 (1906).

Da queste 19 determinazioni ho ricavato il valore della costante di trasformazione λ , sia facendo la media dei valori che si ottengono accoppiando le determinazioni secondo due combinazioni diverse che chiamerò brevemente I e II, sia calcolandone il valore più probabile secondo la teoria dei minimi quadrati.

Nella combinazione I, per tener conto di tutte le determinazioni ho accoppiato la 1^a colla 11^a, la 2^a colla 12^a ecc., la 9^a colla 19^a ed infine la 10^a pure colla 19^a; ottenni così dieci valori di λ , di cui presi la media. Nella combinazione II ho procurato di accoppiare determinazioni più distanti fra di loro, e precisamente ho accoppiato le prime cinque colle ultime cinque rispettivamente e le prime quattro colle ultime quattro. Ottenni così 9 valori di cui presi la media.

Faccio notare che fra i valori ottenuti in queste combinazioni qualcuno si scosta considerevolmente dalla media. Questo potrebbe essere dovuto al fatto che le due determinazioni accoppiate, pur non essendo affette da errore troppo grande, siano state scelte in modo da influire entrambe nello stesso senso sull'errore del risultato; ma potrebbe anche darsi che una delle determinazioni sia tale che, accoppiata con un'altra qualunque, dia sempre un risultato molto diverso dalla media, nel qual caso essa sarebbe da scartarsi come affetta da errore troppo grande. Questo caso però non si verifica per nessuna delle 19 determinazioni: si ha infatti che il valore che si scosta maggiormente dalla media nella combinazione I è quello che si ottiene accoppiando la 5^a colla 15^a determinazione, d'altra parte però si otterrebbero valori molto vicini alla media accoppiando la 5^a colla 17^a o colla 18^a, e così pure se si accoppia la 15^a colla 1^a. Analoghe considerazioni si possono fare sulle coppie di determinazioni che nella combinazione II danno i valori più distanti dalla media.

Resta dunque giustificato l'uso del metodo dei minimi quadrati per il calcolo del più probabile valore di λ , tenendo conto di tutte le 19 determinazioni. Nella applicazione del metodo, poi, ho considerato come incognite da determinarsi sia la costante di trasformazione, sia l'attività corrispondente al tempo $t = 0$; in base poi ai due valori trovati, ho calcolato le attività che compaiono nella tabella I accanto a quelle osservate.

Nella tabella II sono riportati i valori medi di λ ottenuti coi tre metodi detti e quali risultano computando il tempo sia in mesi, sia in secondi; sono dati inoltre i valori corrispondenti del periodo T della mezza trasformazione, come pure la costante trovata dall'Antonoff.

TABELLA II.

	λ (mesi ⁻¹)	λ (secondi ⁻¹)	T
Combinaz. I.	0.00328	1.248×10^{-9}	anni 17, mesi 7
" II.	0.00341	1.298 "	" 16 " 11
Met. min. quadr.	0.00343	1.305 "	" 16 " 10
Determinaz. indiretta (Antonoff)	—	1.33 "	" 16 " 6

Da queste medie ricavate in modi diversi dalle mie determinazioni, credo di poter concludere che il periodo della mezza trasformazione del Radio D, dedotto in modo diretto dal decrescere dell'attività di un minerale (la cotunnite vesuviana) reso attivo da questa sostanza, risulta non molto diverso da 17 anni.

Chimica. — *Sulla capacità degli alogenuri sodici di dare soluzioni solide ad alta temperatura.* Nota di M. AMADORI, ⁽¹⁾ presentata dal Socio G. CIAMICIÀN.

In una Nota precedente ⁽²⁾ ho esposto i risultati di alcune ricerche eseguite con G. Pampanini sulla solubilità tra gli alogenuri potassici ad alta temperatura.

Ho creduto opportuno eseguire ricerche analoghe per i corrispondenti sali sodici per vedere se questi si comportano come i primi o in modo diverso. Però mentre pei sali potassici si erano eseguite ricerche di solubilità anche a bassa temperatura ⁽³⁾, per i sali sodici fu preso in considerazione solo il loro comportamento a temperatura elevata, perchè dalla soluzione acquosa il solo cloruro cristallizza anidro, il bromuro e l'ioduro cristallizzano con 2 H₂O.

Delle tre coppie Na Cl-Na Br, Na Br-NaI, Na Cl-NaI, la prima e la terza erano state studiate da Ruff e Plato ⁽⁴⁾, che si limitarono ad osservare le temperature di inizio di cristallizzazione, trascurando le variazioni termiche successive e la natura della massa depositantesi.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova, diretto dal prof. G. Bruni.

⁽²⁾ Questi Rendiconti. Vol. XX, 2° sem., pag. 572; 1911.

⁽³⁾ Questi Rendiconti, pag. 473.

⁽⁴⁾ Berichte, 36, 2357; 1903.

Le esperienze furono eseguite con il metodo descritto nella Nota precedente: le miscele dei due sali vennero fuse in crogiuolo di platino in forno elettrico a resistenza di filo di nichel, nella massa fusa era immerso direttamente il termoelemento Pt-Pt-Rd. La quantità di miscuglio usata era di 15 grammi.

I punti di fusione dei tre sali puri risultarono:

Na Cl	808°
Na Br	748
Na I	662

1.° — Na Cl-Na Br.

Il punto di solidificazione del bromuro, che dei due sali fonde più basso, viene leggermente abbassato per aggiunta di cloruro. La curva di cristallizzazione è una curva a minimo assai lieve molto simile a quella tracciata da Ruff e Plato; la temperatura più bassa di solidificazione è 744°, di solo 4 gradi inferiore al punto di solidificazione del bromuro.

TABELLA 1^a. — Na Cl-Na Br.

Numero	% in peso		% molecolare		Temperatura di cristallizzazione
	Na Cl	Na Br	Na Cl	Na Br	
1	0	100	0	100	748°
2	7.5	92.5	11.88	88.12	745
3	15	85	23.36	76.63	744
4	22.5	77.5	33.62	66.38	744
5	30	70	43.22	56.78	745
6	40	60	53.96	46.04	747
7	50	50	63.90	36.10	759
8	60	40	72.54	27.46	768
9	70	30	80.41	19.59	778
10	85	15	91.20	8.80	792
11	100	0	100	0	808

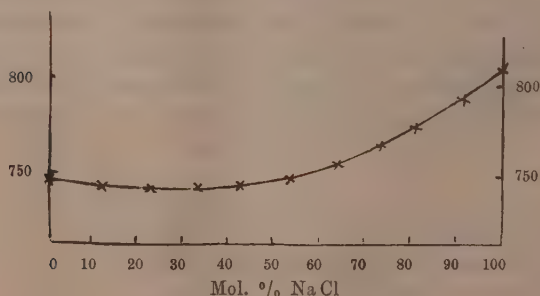


FIG. 1. — Na Cl-Na Br.

Le curve di raffreddamento delle singole miscele mostrano solamente un rallentamento che si può considerare come un arresto durando al più 10-12 gradi; non si può quindi tracciare una seconda curva che indichi il termine della cristallizzazione.

Le curve di raffreddamento e il diagramma di stato mostrano la completa solubilità ad alta temperatura tra cloruro e bromuro sodico.

Il raffreddamento delle miscele di concentrazione intermedia venne seguito fino a 200°, ma non si osservò alcun arresto o rallentamento ulteriore indicante una scomposizione dei cristalli misti a temperature più basse, anche adoperando una massa doppia.

2.° — Na Br-Na I.

Questa coppia ha un comportamento analogo alla precedente: il minimo nelle temperature di cristallizzazione è un po' più accentuato a 645°, 17 gradi più basso del punto di solidificazione dell'ioduro.

TABELLA 2^a. — Na Br-Na I.

Numero	% in peso		% molecolare		Temperatura di cristallizzazione
	Na Br	Na I	Na Br	Na I	
1	0	100	0	100	662°
2	7.5	92.5	10.80	89.70	652
3	15	85	20.00	80.00	648
4	22.5	77.5	29.16	70.84	645
5	30	70	38.66	61.34	647
6	40	60	48.72	51.28	655
7	55	45	63.85	36.15	674
8	70	30	77.02	22.98	696
9	85	15	89.13	10.87	721
10	100	0	100	0	748

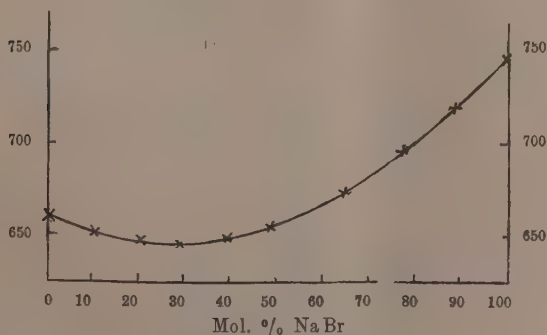


FIG. 2. — Na Br-Na I.

La miscibilità allo stato solido ha luogo in tutti i rapporti anche tra bromuro e ioduro; lungo il raffreddamento non appare alcuna variazione termica in seguito a scomposizione dei cristalli misti.

3.° — Na Cl-Na I.

I due sali hanno un comportamento diverso dalle due coppie precedenti dovuto alla non completa solubilità.

Le miscele da 0 a 26 mol. % Na Cl mostrano solo un largo intervallo di cristallizzazione, durante il quale si depositano soluzioni solide di cloruro in ioduro. Le miscele da 25 a 96 mol. % Na Cl per solidificazione depositano dapprima cristalli misti più o meno ricchi in cloruro, poi, alla temperatura di 578°, depositano una miscela eutettica di cristalli misti limiti. Le miscele con un contenuto in Na Cl superiore a 96 mol. % danno curve di raffreddamento in cui manca l'arresto eutettico; anche queste miscele per solidificazione danno cristalli misti omogenei.

TABELLA 3^a. — Na Cl-Na I.

Numero	% in peso		% molecolare		Temperatura di cristallizzazione	Temperatura d'arresto eutettico	Durata in secondi per 15 gr. di miscela
	Na Cl	Na I	Na Cl	Na I			
1	0	100	0	100	662°	—	—
2	3	97	7.24	92.76	644-618	—	—
3	7	93	15.06	84.94	625-595	—	—
4	10	90	22.07	77.92	612	—	—
5	11.5	88.5	25.00	75.00	608	—	—
6	13	87	27.50	72.50	597	578°	20
7	15	85	30.86	69.14	589	578	80
8	17	83	34.52	65.48	582	578	140
9	20	80	39.08	60.92	?	578	240
10	22	78	41.57	58.43	600	578	200
11	26	74	47.32	52.68	621	579	180
12	30	70	52.57	47.43	641	578	140
13	40	60	62.96	37.04	680	577	100
14	50	50	72.03	27.97	715	576	70
15	60	40	79.68	20.32	733	578	40
16	70	30	85.61	14.39	754	578	40
17	80	20	91.27	8.73	774	577	30
18	90	10	95.86	4.14	791	577	10
19	93	7	97.16	2.84	797	—	—
20	96	4	98.42	1.58	803	—	—
21	100	0	100	0	808	—	—

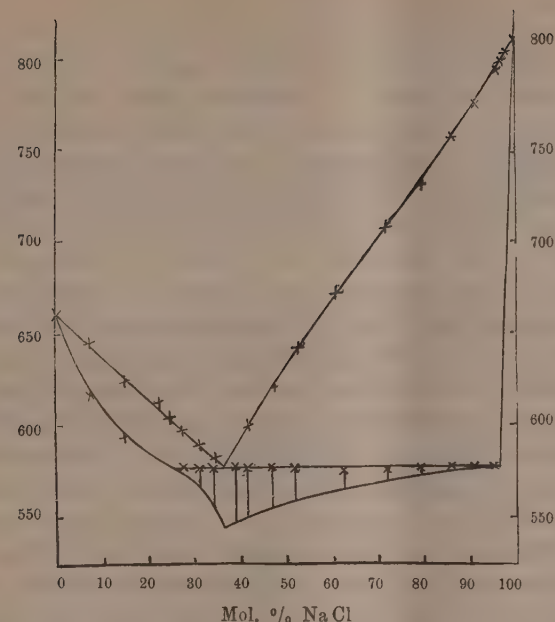


FIG. 3. — NaCl-NaI.

La solubilità fra cloruro e ioduro sodico è quindi limitata da 0 a 25 e da 96 a 100 mol. % di NaCl. La curva di cristallizzazione primaria è composta di due rami che s'incontrano in un punto eutettico: esso giace alla temperatura di 578° e corrisponde a una concentrazione di 37 mol. % NaCl: anche questa curva è in accordo con quella ottenuta da Ruff e Plato.

Le ricerche ora esposte sui sali sodici mostrano che questi si comportano in modo analogo ai corrispondenti sali potassici, sia nei rapporti di solubilità, sia nell'andamento delle curve di cristallizzazione primaria.

Per i sistemi *Cloruro-Bromuro*, *Bromuro-Ioduro*, la solubilità allo stato solido è completa; le curve di cristallizzazione primaria hanno un leggero minimo: 6 gradi per KCl-KBr, 4 per NaCl-NaBr; 16 per KBr-KI, 17 per NaBr-NaI.

Per i sistemi *Cloruro-Ioduro* la solubilità allo stato solido è limitata: le curve di cristallizzazione primaria sono costituite di due rami che s'incontrano in un punto eutettico: esso si trova a una concentrazione di 49 mol. % cloruro per i sali potassici, di 37 mol. % cloruro per i sali sodici. La temperatura eutettica è più bassa del punto di solidificazione dell'ioduro, 80 gradi per KCl-KI, 84 per NaCl-NaI; i due rami della curva di cristallizzazione primaria hanno un andamento analogo.

La solubilità allo stato solido è minore tra i sali sodici che tra i potassici.

L'ioduro potassico si scioglie nel rispettivo cloruro fino a 9 mol. %, l'ioduro sodico fino a 3.5 mol. %.

Il cloruro potassico si scioglie nel corrispondente ioduro fino a 49 mol. %, il cloruro sodico fino a 25 mol. %. Intorno a questo punto credo opportuno aggiungere alcune osservazioni cui avevamo accennato nella Nota precedente. Qui tra sali potassici e sali sodici si osserva una certa diversità per lo meno apparente. Infatti, per i sali potassici le miscele di concentrazione in cloruro inferiore all'eutettica non darebbero depositi eutettici, per i sali sodici anche tali miscele separerebbero miscugli eutettici. Nell'esporre i risultati del sistema KCl-KI avevamo fatto notare che le miscele da 36 a 49 mol. % KCl hanno un inizio di cristallizzazione a temperature di soli 10 gradi superiori alla temperatura eutettica e non è possibile distinguere la cristallizzazione primaria dalla cristallizzazione eutettica, qualora abbia luogo una separazione di natura eutettica. Non è quindi da escludere che anche per i sali potassici l'arresto eutettico si prolunghi dalla parte dell'ioduro quantunque la curva di cristallizzazione primaria e le differenze così piccole nelle temperature di cristallizzazione in questo intervallo non avvalorino questa ipotesi. È da notare però che il diverso comportamento dei sali sodici, non richiede una diversa interpretazione per i sali potassici e che del resto anche ammettendo una diversità in questo punto, si può affermare l'analogia tra sali sodici e potassici anche per questo sistema. Qualsiasi interpretazione si voglia dare, anche la maggiore solubilità del cloruro in ioduro rimane tra i sali potassici, poichè in ogni caso essa ammonta per lo meno a 40 mol. % KCl.

Contemporaneamente alla mia Nota con G. Pampanini sui sali potassici J. B. Wrzesnewky pubblicava nel Journ. Russ. Phys-Chem. Ges. ⁽¹⁾ le sue ricerche eseguite con l'analisi termica su alcune coppie di sali; tra queste erano compresi i sistemi studiati da noi: KCl-KBr, KBr-KI, KCl-KI. Di recente il lavoro di Wrzesnewky fu pubblicato nella Zeitschr. f. anorg. Chemie ⁽²⁾ e ne ho potuto conoscere i risultati.

Le ricerche del chimico russo per i due primi sistemi sono in accordo con le nostre per ciò che riguarda la completa solubilità tra i sali allo stato solido; al contrario sono molto diverse le curve di cristallizzazione che risultano dalle sue e dalle nostre esperienze: per la terza coppia le diversità nelle temperature di cristallizzazione primaria non sono così forti come per le precedenti, ma mentre dalle nostre ricerche risulta una solubilità allo stato solido abbastanza limitata, secondo le ricerche di Wrzesnewky la solubilità sarebbe completa.

Poichè queste diversità di risultati sono molto forti e non credo si possano attribuire a diverse condizioni d'esperienza, stimo conveniente esaminarle in una prossima Nota.

⁽¹⁾ Journ. Russ. Phys-Chem. Ges 43, 1364; C. B. 1912, 1° sem., pag. 464.

⁽²⁾ Zeit. f. anorg. Ch. 74, 95; 1912.

Chimica. — *Separazione e determinazione quantitativa dell'antimonio nei metalli bianchi da cuscinetti*. Nota del dott. I. COMPAGNO, presentata dal Corrispondente A. PERATONER.

Durante lo studio e le analisi numerose che ho avuto occasione di fare del metallo bianco da cuscinetti, largamente usato nell'industria e principalmente nella costruzione di macchine, locomotive ecc. ecc., sono riuscito ad introdurre, nei metodi analitici sinora usati, alcune utili modificazioni, che conseguono lo scopo di rendere più facile e meno lungo il dosamento dei singoli elementi costituenti queste leghe.

Nella presente Nota, però, mi limito a render noto solo ciò che riguarda la separazione e la determinazione quantitativa dell'antimonio, riservandomi di pubblicare, in seguito, la parte che riflette gli altri componenti delle dette leghe, appena avrò completamente portato a termine le relative esperienze in corso.

L'antimonio viene introdotto nelle leghe, cosiddette *metalli da cuscinetti*, come anche in quelli *da guarniture, d'antifrizione* ecc. per la proprietà che esso ha di conferire alla lega una notevole durezza, diminuendone la malleabilità.

La quantità di esso, introdotta nella preparazione dei metalli bianchi da cuscinetti, varia, generalmente, salvo il caso di usi speciali a cui esse leghe vengono destinate, da un minimo di 7 % ad un massimo di 16 %.

L'antimonio viene associato allo stagno, principale elemento della lega, insieme al rame. Qualche altro elemento, quale il piombo, lo zinco ecc. può, qualche volta, anche trovarsi a far parte della lega medesima, ma è solo tollerato in quantità assai piccola, o semplicemente, in tracce, provenienti da impurezze dei metalli impiegati.

I numerosi metodi volumetrici e ponderali proposti pel dosaggio dell'antimonio delle leghe bianche, taluni dei quali assai precisi ed eleganti, non riescono, pel caso nostro, di pratica utilità, a causa della lunga preparazione che il dosamento generalmente richiede.

Il metodo, che è più comunemente preferito all'uopo, è quello elettrolitico proposto per la prima volta da Parrodi e Mascazzini ⁽¹⁾, poi da Luckow ⁽²⁾,

⁽¹⁾ Zeitschr. f. anal. Ch., 18 (1879), pag. 587.

⁽²⁾ Ibid, 19 (1880), pag. 13.

quindi migliorato da Classen e da Reiss (¹), Classen (²), Lecrenier (³), Ost e Klapproth (⁴), Hollard (⁵), Henz (⁶) ed altri.

Secondo questo metodo l'antimonio viene dosato allo stato metallico, mediante l'impiego della capsula di Classen e di una soluzione in cui il metallo si trova allo stato di solfosale.

Ma anche questo metodo assai semplice, in apparenza, non è scevro di inconvenienti, ed infatti:

L'elettrolito, dal quale vuol separarsi l'antimonio, deve essere una soluzione perfettamente limpida; quindi sono necessari: una filtrazione accurata, e ripetuti accuratissimi lavaggi, affinchè alcuna parte del metallo da dosare non venga trattenuto nè dal filtro, nè dalla parte insolubile dalla quale si vuole sia separato. operazione questa sufficientemente lunga ed incomoda.

Inoltre il lavaggio del deposito metallico nella capsula, ad elettrolisi finita, ha pure le sue difficoltà, e chi ha pratica delle operazioni elettrolitiche sa bene di quanta attenzione e di quanto riguardo abbisogna tale manipolazione, specialmente se il liquido, proveniente dalla separazione dell'antimonio, deve venir sottoposto ad ulteriori trattamenti e determinazioni quantitative (⁷).

Ed altri inconvenienti ancora vi sono; ad esempio:

a) la quantità, relativamente grande, di monosolfuro sodico che generalmente si impiega in tale operazione, inconveniente questo tutt'altro che trascurabile, sia in riguardo alla economia (specie se le leghe da esaminare sono in numero rilevante), sia pel grave disturbo che la presenza di una quantità rilevante del detto reattivo apporta, quando l'elettrolito, dopo la separazione dell'antimonio, deve sottoporsi ad ulteriori determinazioni;

b) possono commettersi, anche involontariamente, errori di una certa entità, non esclusi quelli di pesata, a causa della piccola quantità di lega (generalmente gr. 0.50) sottoposta all'analisi, errori che divengono non trascurabili quando la composizione si riferisce a 100 parti (⁸).

(¹) Berich. deutsh. Ch. Gesel., 14 (1881), pag. 1629; 17 (1884), pag. 2471.

(²) Quant. Anal. d. Elect., S. 190, 4 Aufl.

(³) Chem. Zgt., 13 (1889), pag. 1219.

(⁴) Zeitschr. f. angew. Ch. (1900), pag. 828.

(⁵) Comptes rendus, 1896, tom. 123, pag. 1064; Ann. de chim. analyt., 1897, pag. 242 Bull. Soc. Ch. de France, 1900, tom. 23, pag. 291.

(⁶) Inaug. Dissert., Zürich, 1904, pag. 35; Zeitschr. f. angew. Ch., 31 (1903), pag. 31.

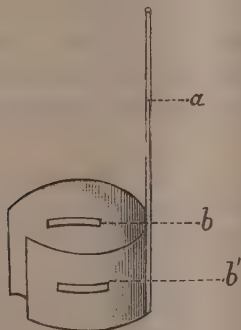
(⁷) Ho tentato l'impiego di catodi reticolati con un elettrolito filtrato, per ovviare alla difficoltà suddetta, riguardante il lavaggio; ma neppure essi hanno dato risultati soddisfacenti, a causa di piccole particelle di solfo che, per decomposizione del solfuro sodico nel corso dell'elettrolisi, vanno ad accludersi tra le maglie della rete, riuscendo talora, per la difficoltà del loro allontanamento, a falsare i risultati.

(⁸) È bene qui accennare anche agli errori che costantemente si hanno nelle depo-

Con la modificazione che vengo a descrivere, io credo di portare il dosaggio dell'antimonio in un campo assai pratico, raggiungendo, insieme al massimo grado di semplicità, celerità, economia, una conveniente esattezza.

Tal metodo è basato sull'impiego di un catodo di foggia speciale, e di un elettrolito, che pur essendo di poco dissimile da quello richiesto per l'uso della capsula di Classen, riesce assai più comodo preparare.

Come si rileva dalla figura annessa, il nuovo catodo consta di una lamina di platino rettangolare, accartocciata a forma di cilindro.



Nella parte media, di detta lamina, sta saldato autogenicamente un filo di platino (*a*) che serve a reggerla.

Due fenditure *b* e *b'* praticate orizzontalmente ed opposte, ad uguale distanza dagli estremi della lastra, servono a favorire la diffusione dell'elettrolito dall'anodo alla superficie esterna del catodo.

Il catodo è consigliabile che sia in platino iridiato e spulito al getto di sabbia; deve avere una lunghezza di cm. 13 per cm. 3.9 di altezza; le fenditure orizzontali una lunghezza di mm. 30 per mm. 1,5.

Il tutto è calcolato in modo da potere utilizzare un elettrodo di circa cm² 100 di superficie complessiva tra la faccia esterna e quella interna.

Il peso di esso sarà di circa gr. 24-25. L'impiego di detto catodo offre i vantaggi seguenti:

1°. Permette, in ogni caso, di operare direttamente sopra un grammo di lega;

2°. Toglie l'inconveniente della filtrazione preventiva dell'elettrolito

sizioni elettrolitiche dell'antimonio. Vedi a tal proposito: Henz, loc. cit.; Fischer, Ber. deutsch. Ch. Gesell., 36 (1904), pag. 2348; M. M. Dormaar, Bull. Soc. ch. de France, 4, 283 (1908); O. Scheon, Zeitschr. f. angew. Ch. (1909), pag. 25; Hollard-Bertieaux, *Analyse des métaux par électrolyse*, 1909; *Resultats expérimentaux. Antimoine*.

non venendo influenzata la deposizione dell'antimonio dalla presenza di sostanze indisciolte, come: solfuro di piombo ecc. ⁽¹⁾;

3°. Permette, in maniera facile ed assai comoda, il lavaggio del deposito metallico sul catodo, ad elettrolisi finita, senza che si incorra ad alcuna causa di errori; si effettua, quindi, agevolmente la pulitura del catodo medesimo, bastando per questa una semplice immersione di esso, per poco tempo, anche semplicemente a freddo, nella soluzione nitrico-tartarica consigliata da Ost ⁽²⁾.

Modo di operare. — In un bicchiere da cm³ 300, forma alta, coperto da vetro di orologio, s'intacca gr. 1 di lega, ridotta in trucioli, mediante una miscela di cm³ 4 di acido cloridrico concentrato e cm³ 4 di acido nitrico diluito (densità 1.2) e si scacciano, per leggero riscaldamento, i vapori nitrosi.

Con circa cm³ 5 di acqua, da una quantità di cm³ 25, previamente misurata, si lava il vetro d'orologio, che ha coperto il bicchiere durante l'intacco della lega, conservando i restanti cm³ 20 per gli ulteriori lavaggi.

Si neutralizza e si alcalinizza quindi la soluzione con cm³ 10 circa di soluzione di idrato sodico (densità 43 B. a 15° C), si addiziona di cm³ 80 di monosolfuro sodico (densità 1.225) e di gr. 6 circa di cianuro di potassio.

Si fa bollire per cinque minuti, si agita, e finalmente si lavano le pareti del bicchiere con i rimanenti cm³ 20 di acqua.

L'elettrolito, dopo quasi completo raffreddamento, è pronto per l'elettrolisi; questa si effettua nel bicchiere medesimo in cui è stato fatto l'intacco della lega.

Come anodo può impiegarsi un filo di platino del diametro di circa mm. 1, di cui l'estremità immersa nell'elettrolito, è avvolta ad elica in tre o quattro spire (diam. circa cm. 1).

La separazione dell'antimonio può compiersi durante la notte, con intensità di corrente uguale a 0,10 Ampère.

Il lavaggio del catodo col deposito dell'antimonio, ad elettrolisi finita, si effettua comodamente, senza interrompere la corrente, mediante un getto sottile di acqua, quindi con nuova acqua contenuta in un bicchiere e finalmente con alcool.

Ho avuto costantemente, seguendo tale metodo, deposizioni di antimonio perfettamente aderenti, di splendore metallico, di aspetto assai bello e con risultati sufficientemente esatti, come può rilevarsi dai seguenti prospetti:

⁽¹⁾ È solo consigliabile ricorrere alla filtrazione, qualora le sostanze indisciolte, fossero presenti nell'elettrolito in quantità eccessive.

⁽²⁾ Zeitschr. f. angew. Ch., 1901, pag. 827.

I. Risultati ottenuti mediante l'impiego del catodo suddescritto, operando con quantità note di Sb :

Sb pesato	gr. 0,1000	trovato	gr. 0,1002
" "	" 0,1100	" "	" 0,1090
" "	" 0,1200	" "	" 0,1202
" "	" 0,1400	" "	" 0,1410
" "	" 0,1500	" "	" 0,1509
" "	" 0,1600	" "	" 0,1620
" "	" 0,2000	" "	" 0,1996
" "	" 0,2000	" "	" 0,2012

II. Risultati ottenuti operando su leghe formate con quantità note di elementi :

<i>a)</i>		<i>b)</i>	
Sn	79,30 ‰	Sn	80,00 ‰
Cu	8,62 "	Cu	5,00 "
Sb	11,00 " Sb trovato 11,20	Sb	13,00 " Sb trovato 13,15
Pb	1,08 "	Pb	2,00 "
<i>c)</i>		<i>d)</i>	
Sn	75,00 ‰	Sn	— ‰
Cu	5,00 "	Cu	— "
Sb	15,00 " Sb trovato 15,40	Sb	10,00 " Sb trovato 10,10
Pb	5,00 "	Pb	1,00 "
<i>e)</i>		<i>f)</i>	
Sn	— ‰	Sn	— ‰
Cu	— "	Cu	6,00 "
Sb	10,00 " Sb trovato 10,13	Sb	12,00 " Sb trovato 12,02
Pb	2,50 "	Pb	2,00 "

III. Risultati comparativi ottenuti operando su leghe commerciali, mediante l'impiego della capsula Classen ⁽¹⁾ e del mio catodo ⁽²⁾ :

⁽¹⁾ Elettrolito non filtrato.

⁽²⁾ Elettrolito filtrato.

N.° d'ordine	Capsula Classen	Catodo Compagno	Osservazioni
	Sb trovato ‰	Sb trovato ‰	
1	10,84	10,96	Nella lega era presente 1,60 ‰ di Pb
2	11,82	11,20	" " " " 0,41 " "
		11,20	
3	10,80	10,72	Quantità di Pb inferiore a 0,25 ‰
4	11,12	11,16	" " " "
		11,12	
5	11,16	11,08	" " " "
		10,90	
6	10,80	10,96	Nella lega era pressnte 1,70 ‰ di Pb
7	10,56	10,60	Quantità di Pb inferiore a 0,25 ‰
8	11,10	11,20	" " " "
9	11,04	11,40	Nella lega era presente 5,56 ‰ di Pb
10	10,52	10,70	" " " " 5,70 " "

Chimica. — *Sulle soluzioni citrofosfatiche*. Nota di A. QUARTAROLI, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

A proposito della mia Nota sulle soluzioni citrofosfatiche, recentemente pubblicata in questi Rendiconti, il Pratolongo ⁽¹⁾ ammette anzitutto l'errore commesso nel preparare il citrato diammonico e quindi su questo punto nulla ho da aggiungere e nemmeno obiezione alcuna muoverò all'asserto che le esperienze, anche a prescindere da tale errore, possano avere ancora un significato. Mi limito semplicemente ad osservare che le soluzioni preparate dall'A. non erano affatto « assai bene caratterizzate dal modo onde erano ottenute » data l'incertezza di una titolazione con acidi e basi ambedue deboli.

L'A. trova inoltre ingiustificato il mio richiamo sulla distinzione di sali doppi e complessi senza per altro spiegare come nella sua Nota abbia fatto risalire l'ipotesi di *ioni complessi* citrofosfatici al 1881! Quanto all'interpretazione della Nota di Barillè data dall'A., potrà corrispondere fino a un certo punto alla logica, ma non è certo ispirata dalla conoscenza di autori e di scuole.

(1) Questi Rendiconti. Vol. XXI, 1° sem., p. 363.

Infine, all'affermazione del Pratolongo, che nè lui, nè i chimici organici (?) possono credere alla possibilità delle formole da me proposte pei citrati complessi, obietterò che i chimici organici (non so per quale ragione tirati in campo dall'A.) in questo, e in altri casi simili, si limitarono ad esaminare i prodotti separati dalle soluzioni e non la costituzione di quelli esistenti nelle soluzioni stesse: cosa evidentemente ben diversa. Nelle formole da me, con ogni riserva, proposte, si teneva conto (per ragioni di analogia) del probabile intervento del gruppo alcoolico nella formazione della anione complesso e del fatto da me accertato che un aumento della concentrazione di Ba, faceva diminuire la concentrazione di PO_4 .

Aggiungerò poi che non io, ma il Pratolongo ha voluto precorrere le esperienze con apprezzamenti, i quali andavano a tutto beneficio di una ipotesi insostenibile: quella della doppia decomposizione.

Chimica. — *Analisi termica del sistema cloruro d'argento-solfuro d'argento* ⁽¹⁾. Nota di CARLO SANDONNINI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Oltre che la conoscenza delle relazioni di isomorfismo e della tendenza a combinarsi fra i sali dello stesso acido e dei diversi metalli, è interessante conoscere il comportamento delle miscele dei vari sali di un elemento coi diversi acidi.

Il materiale sperimentale in quest'ultimo senso è relativamente scarso ed assai incompleto; così, per esempio, anche per gli alogenuri di uno stesso metallo è nota una sola serie completa, quella dei vari alogenuri di piombo sperimentata in parte da K. Mönkemeyer ⁽²⁾ ed in parte da me ⁽³⁾.

Le relazioni fra gli alogenuri e gli altri sali sono anche più scarsamente note. F. S. Zemčuzny ⁽⁴⁾ sperimentò le coppie cloruro-cromato, cloruro-bicromato per i sali potassici: da queste ricerche risulta che i due componenti sono semplicemente solubili in tutti i rapporti allo stato liquido, ma solidificando danno un semplice eutettico. Lo stesso risulta dalle ricerche di Karandeeff ⁽⁵⁾ sulle coppie cloruro-silicato, fluoruro silicato per i sali di calcio. Infine dalle ricerche di Wolters ⁽⁶⁾ risulta che cloruro e solfato sodico

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova, diretto dal prof. G. Bruni.

⁽²⁾ N. Jahrb. f. Min. G. und P., 22 Bb, 1 (1906).

⁽³⁾ Questi Rendiconti, 20 (I), 172 (1911).

⁽⁴⁾ Zeitschr. f. an. Ch. 57, 267 (1908).

⁽⁵⁾ Zeitschr. f. an. Ch. 68, 188 (1910).

⁽⁶⁾ N. Jahrb. f. Min. G. und P., 30 Bb. 57 (1910).

si comportano nel modo ora detto, mentre che per la coppia fluoruro-solfato sodico si rivela la formazione di un composto molecolare $\text{NaF} \cdot \text{Na}_2\text{SO}_4$.

In questo campo lo studio delle relazioni ad alta temperatura tra cloruri e solfuri mi parve non privo di interesse.

Tra i solfuri, quelli che per questo scopo meglio si prestano, perchè facilmente si possono avere puri ed anidri e fondono quasi inalterati, sono i solfuri di Ag, Cu e Pb. Altri solfuri sono assai stabili alla fusione (p. es. i solfuri di bismuto ed antimonio), ma non si prestano allo studio termico delle loco miscele coi cloruri per la troppa distanza dei rispettivi punti di fusione. Assai interessante sarebbe pure lo studio delle miscele fra i cloruri ed i solfuri alcalini, ma questi ultimi assai difficilmente si possono avere anidri e puri.

Io avevo da qualche tempo iniziato lo studio delle tre coppie $\text{AgCl} - \text{Ag}_2\text{S}$, $\text{CuCl} - \text{Cu}_2\text{S}$, $\text{PbCl}_2 - \text{PbS}$, e lo studio del primo sistema era già compiuto. Nell'ultimo fascicolo della *Zeitschrift für anorganische Chemie* (vol. 74, fascicoli 3-4, 28 marzo 1912) è annunziato l'invio alla redazione di un lavoro di W. Truthe, dal cui titolo appare che l'A. tratta lo stesso argomento da me studiato. Interrompo quindi le mie ricerche, ma non credo inopportuno di esporre brevemente i risultati da me sinora ottenuti col sistema cloruro-solfuro d'argento.

Il solfuro d'argento adoperato proveniva dalla casa Kahlbaum e, analizzato prima della fusione, diede il 99,24% di Ag_2S ; dopo fusione in atmosfera d'azoto, diede in media il 96% di Ag_2S : il resto si deve a liberazione di argento metallico.

Il solfuro d'argento, secondo Friedrich e Leroux ⁽¹⁾, fonde a 835° ed ha un punto di trasformazione a 175°; dalle mie determinazioni questi punti risultarono rispettivamente a 836° e a 178°.

Il cloruro d'argento usato fondeva a 455°.

Nella seguente tabella sono riuniti i dati termici ottenuti. Le percentuali in solfuro d'argento non sono corrette in base ai dati precedenti, anche perchè, venendo il punto di fusione del solfuro d'argento rapidamente abbassato per aggiunta di cloruro, verosimilmente anche la decomposizione sarà di molto minore.

(¹) *Metallurgie* III, 362 (1906).

Molecole % di Ag_2S	Temperature di cristallizzazione primaria	Temperature di cristallizzazione eutettica	Durate in secondi per 20 grammi di miscela
0	455°	—	—
5	440	—	—
10	422	—	—
20	400	380°	30"
30	390	380	50
35	eut.	380	180
40	400	378	100
50	480	378	80
60	596	375	50
70	630	380	40
80	698	372	20
90	750	—	—
95	782	—	—
100	836	—	—

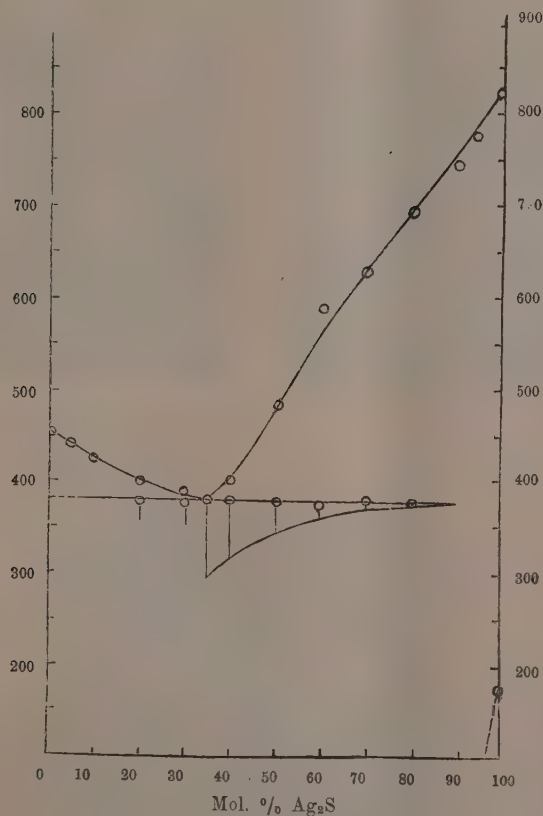


FIG. 1. — Cloruro d'argento e solfuro d'argento.

Le due curve di deposizione primaria si tagliano in un punto eutettico a 35 mol. % di Ag_2S e a 380°.

Il solfuro d'argento solidifica con poco sviluppo di calore, cosicchè riesce difficile cogliere esattamente l'inizio di cristallizzazione delle miscele ricche in solfuro. D'altra parte per le miscele ricche in cloruro d'argento l'arresto eutettico si nota chiaramente nelle curve di raffreddamento solo per le miscele a 30 e 20 mol. % di Ag_2S , mentre che per le miscele a 10 e 5 mol. % si nota solamente un intervallo di cristallizzazione che scende sino alla temperatura eutettica senza però che a questa si noti alcun arresto. Dall'altra parte del diagramma le durate di arresto eutettico si riducono a zero, circa a 90 mol. % di Ag_2S ; le curve di raffreddamento di questa miscela e di quella a 90 mol. % non hanno alcun arresto o rallentamento a 380° .

Questo comportamento fa supporre che si formino cristalli misti in proporzioni limitate da entrambe le parti. Siccome le masse fuse si prestano bene ad essere levigate, ho eseguito alcune micrografie a luce riflessa per chiarire tale questione. Le riproduzioni fotografiche di alcune di esse si trovano nella qui annessa tavola. L'ingrandimento è in tutte di 150 diametri.

Come attacco mi servii dell'acido nitrico concentrato in soluzione acquosa (1:1), ripulendo però leggermente i campioni prima di esaminarli al microscopio. Vennero così esaminate le miscele a 5, 10, 20, 60, 80, 90 e 95 mol. % di Ag_2S , il solfuro di argento puro e la miscela eutettica a 35 mol. % di Ag_2S . Le miscele a 5, 10, 20 (figg. 2, 3, 4) mostrano chiaramente un deposito primario scuro di AgCl in massa grigio-chiara eutettica, la quale aumenta coll'aumentare della concentrazione in Ag_2S . Il campione di una miscela al 2 % di Ag_2S , che interessava appunto per la ricerca del limite di solubilità allo stato solido di Ag_2S in AgCl , non potè essere levigato sufficientemente per prestarsi ad una micrografia. Nel campione a 35 mol. % di Ag_2S la miscela eutettica appare così fine che non si potè sdoppiare nemmeno con un ingrandimento a 650 diametri.

Le miscele a 60 ed 80 mol. % Ag_2S (figg. 5, 6) mostrano un deposito primario bianco di solfuro di argento in massa bruna eutettica la quale diminuisce coll'aumentare della percentuale in Ag_2S . Osservati alcuni campioni delle miscele a 90 e 95 mol. %, essi mostrarono un campo completamente omogeneo, identico a quello del solfuro d'argento puro.

Corredando di questi risultati quelli ottenuti coll'analisi termica, si può quindi concludere che il solfuro d'argento scioglie allo stato solido circa 10 mol. % di cloruro d'argento, ma non si può dire se e quanto il solfuro d'argento sia solubile nel cloruro d'argento.

Il punto di trasformazione del solfuro di argento che si nota nella curva di raffreddamento del solfuro di argento puro con un debole rallentamento, non si nota più con sicurezza nelle varie miscele anche ricchissime in Ag_2S ; molto probabilmente, esso viene rapidamente abbassato per aggiunta di cloruro, confermando così la formazione di soluzioni solide di cloruro in solfuro. Le curve di raffreddamento vennero costruite fino a 100° .



FIG. 2. — $5 \text{ Ag}_2\text{S} + 95 \text{ Ag Cl}$
(Ingrand. $\times 150$).



FIG. 3. — $10 \text{ Ag}_2\text{S} + 90 \text{ Ag Cl}$
(Ingrand. $\times 150$).



FIG. 4. — $20 \text{ Ag}_2\text{S} + 80 \text{ Ag Cl}$
(Ingrand. $\times 150$).

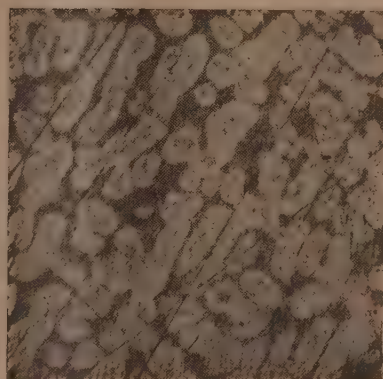


FIG. 5. — $60 \text{ Ag}_2\text{S} + 40 \text{ Ag Cl}$
(Ingrand. $\times 150$).

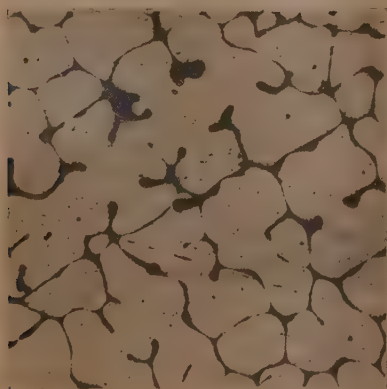


FIG. 6. — $80 \text{ Ag}_2\text{S} + 20 \text{ Ag Cl}$
(Ingrand. $\times 150$).

Chimica. — *Solfati anidri*⁽¹⁾. Nota II di G. CALCAGNI, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

Nella prima Nota su questo argomento ⁽²⁾ trattammo della formazione dei solfati doppi anidri possibili, nelle condizioni in cui si svolge l'analisi termica, tra CaSO_4 ed Na_2SO_4 ; nella presente ci occupiamo della formazione di solfati doppi anidri possibili tra BaSO_4 e K_2SO_4 , BaSO_4 ed Na_2SO_4 nelle stesse condizioni sperimentali.

Molto estesa, come abbiamo veduto, era la letteratura che riguardava il caso precedente, mentre, per quanto a noi consta, è nulla nel caso attuale. La ragione di questo forse si deve ricercare da una parte nella insolubilità quasi completa del solfato di bario, che ha impedito di poter studiare la formazione di solfati doppi con quelli alcalini per cristallizzazione da miscugli di soluzioni; dall'altra nella mancanza in natura di questi solfati doppi, il che ha tolto allo studio ogni interesse geologico. L'unico lavoro che si trova nella letteratura in proposito è quello di Le Chatelier ⁽³⁾, nel quale l'autore descrive soltanto la curva di fusione BaSO_4 - Na_2SO_4 , di cui però non dà alcuna spiegazione dettagliata.

Le difficoltà incontrate in queste esperienze sono state notevoli se si pensa che a forti differenze di concentrazioni delle masse fuse corrispondevano differenze di temperature appena sensibili, il che richiese ripetute determinazioni su miscugli sempre nuovi per poter stabilire con precisione le discontinuità che si manifestano nei diagrammi. Il solfato di bario verso 1200° incomincia a decomorsi, e perciò non fu possibile l'esame di masse fuse oltre il 70 % di BaSO_4 .

I prodotti adoperati erano purissimi e completamente anidri. I miscugli erano tutti del peso complessivo di 25 grammi. Questi venivano fusi in un forno elettrico a resistenza di platino, appositamente costruito, il quale poteva portarsi fino ad oltre 1300° . La misura delle temperature si faceva con una pinza termoelettrica Platino/Platino-Rodio e con un pirometro a registrazione ad impulso elettrico, il cui millevoltmetro era del tipo Deprez-Arsonval costruito da Siemens ed Halske; esso indicava la temperatura ogni $12''$ e svolgeva 400 mm. di striscia ogni ora.

Il punto di fusione del Na_2SO_4 è 887° , temperatura identica a quella trovata nel precedente lavoro; il punto di trasformazione enantiotropica però

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Laboratorio chimico della Sanità in Roma.

⁽²⁾ Rend. della R. Acc. dei Lincei. Scienze fis. e mat., vol. XIX, serie 5^a, 2° sem., pag. 422 (1910).

⁽³⁾ Ann. des Mines, serie 9^a, tomo 11, pag. 209 (1897).

è 250° invece di 234°. Il punto di fusione di K_2SO_4 è 1066° e il suo punto di trasformazione è 590°; R. Nacken ⁽¹⁾ dà 1076° punto di fusione, e 595° quello di trasformazione; Heycock e Neville punto di fusione 1066,5° ⁽²⁾; Mc. Crac 1066,1° ⁽³⁾. Il punto di fusione del $BaSO_4$ non si è potuto determinare direttamente poichè si decompone; per estrapolazione in entrambi i diagrammi si è ottenuto 1345°.

Sistema $BaSO_4 - Na_2SO_4$

I risultati ottenuti sono raccolti nella tabella I e diagramma fig. 1.

TABELLA I.

Na_2SO_4 % in peso	$BaSO_4$ % in peso	Mol. % Na_2SO_4	Mol. % $BaSO_4$	Tempera- tura iniziale di cristalliz- zazione	Tempera- tura eutettica	Tempera- tura di decompo- sizione delle soluzioni solide	Tempera- tura di trasforma- zione
100	0	100	0	887°	—	—	250°
95	5	96,83	3,17	895	—	337°	230
90	10	93,67	6,33	905	—	620	—
85	15	90,30	9,70	913	—	665	230
80	20	86,80	13,20	917	—	750	230
78,4	21,6	85,72	14,28	921	—	770	230
75	25	83,13	16,87	917	—	820	230
71	29	80,09	19,91	—	913°	—	230
70	30	79,30	20,70	917	913	—	230
68	32	77,74	22,26	925	913	—	220
66	34	76,13	23,87	940	913	—	230
65	35	75,31	24,69	950	913	—	230
60	40	71,13	28,87	987	913	—	230
55	45	66,76	33,24	1008	913	—	230
50	50	62,16	37,84	1037	913	—	225
45	55	57,34	42,66	1070	913	—	230
40	60	52,27	47,73	1110	915	—	220
35	65	46,99	53,01	1140	920	—	225
30	70	41,32	58,68	1162	925	—	—
20	80	29,11	70,89	pastoso a 1300°		—	—
0	100	0	100	(1345°)	—	—	—

⁽¹⁾ Nachr. K. Ges. Wiss. Göttingen (1907) 602.

⁽²⁾ Journ. Chem. Soc., 67, 160.

⁽³⁾ Ann. Phys. (3) 55, 95.

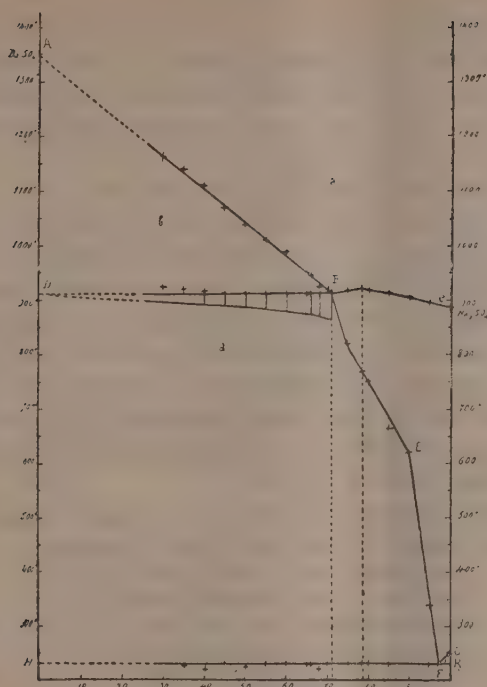


FIG. 1.

La temperatura di fusione del Na_2SO_4 per aggiunta di BaSO_4 cresce invece di diminuire come avviene nelle sostanze isomorfe. Ma questo accrescimento si verifica fino alla concentrazione di 21,6 % BaSO_4 che fonde a 921° ; da questo punto aumentando il contenuto in BaSO_4 si hanno abbassamenti di temperatura appena sensibili fino al miscuglio con 29 % BaSO_4 che fonde a 913° ; questa piccola differenza di temperatura si è ritrovata costantemente.

Da questo punto la curva sale senza discontinuità verso il punto di fusione del BaSO_4 . La curva descritta da Le Chatelier (loc. cit.) presenta anch'essa lo stesso aspetto della nostra con una leggerissima convessità in alto, quasi negli stessi limiti di concentrazione; non si può dire però a quale miscuglio corrisponda il punto più elevato di detta convessità, nè a quale il punto eutettico, poichè, come ho già detto, l'autore non ha fatta alcuna descrizione di questo diagramma.

Questo massimo appena sensibile e molto schiacciato corrisponderebbe ad un composto della formula $\text{BaSO}_4 \cdot 6\text{Na}_2\text{SO}_4$, le cui percentuali di Na_2SO_4 e BaSO_4 sono rispettivamente 78,51 % e 21,49 %. Ma di solfati doppi di questo tipo, per quanto a me consta, non se ne hanno esempi; quindi po-

trebbe darsi che questo massimo sia della stessa natura di quello trovato nel successivo diagramma. Intanto sia per la sensibilità degli apparecchi di misura adoperati, sia per la piccola differenza di temperatura tra il punto massimo e il minimo, nessuna precisa conclusione si può trarre da questi dati. Quello che è certo è che nessuno dei tipi di solfati doppi finora descritti comparisce su questo diagramma.

Le masse fuse hanno tutte un aspetto omogeneo.

Le curve descritte presentano quasi tutte tre punti di fermata, tranne quelle del miscuglio con 71 % Na_2SO_4 che ne presenta due: la temperatura di cristallizzazione dell'eutettico e quella di trasformazione. Le curve tra 71 % Na_2SO_4 e Na_2SO_4 puro hanno un primo punto corrispondente alla cristallizzazione iniziale, un secondo alla temperatura di decomposizione delle soluzioni solide, un terzo alla temperatura di trasformazione di Na_2SO_4 . Le altre curve presentano un primo punto di fermata corrispondente alla cristallizzazione primaria di BaSO_4 , un altro all'eutettico; ed un terzo alla temperatura di trasformazione di Na_2SO_4 .

Nel diagramma descritto si distinguono i seguenti campi:

- a) campo d'esistenza della fase liquida omogenea;
- b) " d'equilibrio tra BaSO_4 e fase liquida;
- c) " d'esistenza delle soluzioni solide;
- d) " d'equilibrio delle soluzioni solide c e α - Na_2SO_4 - BaSO_4 ;
- e) " d'esistenza di β - Na_2SO_4 - BaSO_4 ;
- f) " d'equilibrio tra soluzioni solide c e β - Na_2SO_4 - BaSO_4 .

Sistema BaSO_4 - K_2SO_4

I risultati ottenuti sono raccolti nella tabella II e diagramma fig. 2.

TABELLA II.

K_2SO_4 % in peso	BaSO_4 % in peso	Mol. % K_2SO_4	Mol. % BaSO_4	Tempera- tura iniziale di cristalliz- zazione	Tempera- tura eutettica	Tempera- tura di decompo- sizione delle soluzioni solide	Tempera- tura di trasforma- zione
100	0	0	100	1066°	—	—	590°
95	5	96,23	3,77	1075	—	—	565
90	10	93,35	6,65	1080	—	695°	565
85	15	88,38	11,62	1075	—	787	565
80	20	82,28	17,72	1068	—	850	565
75	25	80,07	19,93	1055	—	935	565
70	30	75,76	24,24	1045	—	1005	570
65	35	71,33	28,67	1032	1015°	—	565
60	40	66,77	33,23	—	1015	—	565
55	45	62,08	37,92	1040	1015	—	570
50	50	57,26	42,74	1070	1015	—	565
45	55	52,29	47,71	1090	1020	—	565
40	60	47,18	52,82	1125	1020	—	565
35	65	41,90	58,10	1150	1015	—	560
30	70	36,50	63,50	1175	1020	—	—
0	100	0	100	(1345)	—	—	—

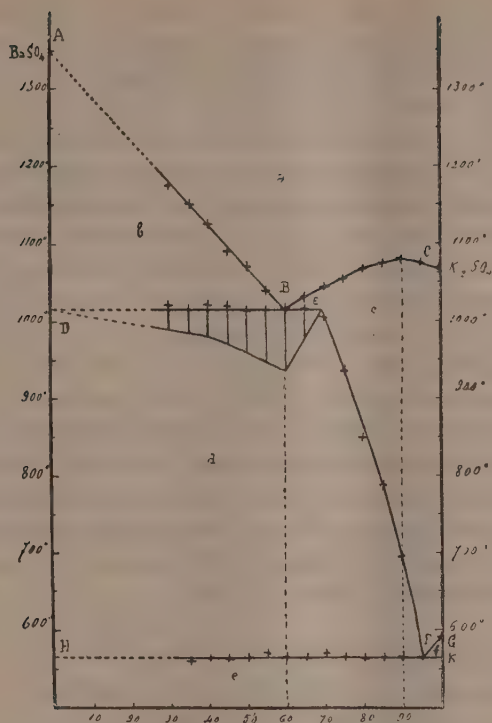


FIG. 1.

Anche in questo caso l'aggiunta di BaSO_4 invece di far diminuire il punto di fusione di K_2SO_4 , lo fa crescere, però presto si raggiunge un massimo di temperatura alla concentrazione 90 % K_2SO_4 ; oltre questa concentrazione la temperatura di fusione si abbassa sempre più fino a raggiungere 1015° alla concentrazione 60 % K_2SO_4 , questa è la temperatura eutetica. Oltre questo punto la temperatura cresce con la concentrazione in BaSO_4 fino al punto di fusione di questo. Quindi l'unico fenomeno che ripetutamente si è trovato costante è la presenza di un massimo alla temperatura di 1080° e alla concentrazione di 90 % K_2SO_4 e 10 % BaSO_4 . È fuori dubbio che questo massimo non corrisponda ad un composto, poichè esso risulterebbe di circa 14 molecole di K_2SO_4 per una di BaSO_4 ; inoltre sulla curva di trasformazione dovrebbe apparire un massimo, il che non si verifica nel nostro caso ⁽¹⁾, essa resta costantemente la stessa; nè si può accertare se la sua

(¹) C. H. Desch, Metallography, pag. 63; R. Ruer, Metallografie, pag. 180.

composizione sia o no una funzione della pressione avendo da fare con sistemi condensati. Però esempi di massimi sulla curva di fusione non corrispondenti a composti se ne hanno: Masuni Chikashigè⁽¹⁾ nel diagramma Bi - Tl trova due massimi che non corrispondono a composti. G. von Hevesy⁽²⁾ nel diagramma KOH - RbOH trova anche due massimi per i quali non si è potuto decidere se corrispondano o no a composti, venendo meno tutti i criteri indiretti possibili in casi simili. Quindi si deve concludere che questo è un massimo che si presenta sulle curve di fusione di una serie di cristalli misti, in cui non valgono più le leggi dell'abbassamento del punto di fusione; e la presenza di un composto non è dimostrata nè da massimo nè da minimo.

Tutte le curve di raffreddamento di questo sistema in generale presentano tre gomiti, tranne quella corrispondente a 95 % K_2SO_4 , che perciò rappresenta l'eutettico della curva di decomposizione delle soluzioni solide, e quella corrispondente a 60 % K_2SO_4 , che è il miscuglio eutettico della curva di fusione. Le curve fino al 70 % K_2SO_4 hanno un gomito corrispondente alla cristallizzazione di cristalli misti, uno alla temperatura di decomposizione di soluzioni solide e un punto di trasformazione del K_2SO_4 . Le curve che vanno dal 60 % K_2SO_4 fino a $BaSO_4$ puro presentano una temperatura di separazione primaria di $BaSO_4$, una temperatura eutettica e una di trasformazione di K_2SO_4 .

Quindi il diagramma risulta dei seguenti campi:

- a) Campo d'esistenza della fase liquida omogenea;
- b) " d'equilibrio tra $BaSO_4$ e fase liquida;
- c) " d'esistenza delle soluzioni solide di K_2SO_4 ;
- d) " d'equilibrio delle soluzioni solide c e α - K_2SO_4 - $BaSO_4$;
- e) " d'esistenza di β - K_2SO_4 - $BaSO_4$;
- f) " d'equilibrio tra soluzioni solide c e β - K_2SO_4 - $BaSO_4$.

Concludendo nei diagrammi su descritti vi è comparsa di un massimo che nel caso del $BaSO_4$ - Na_2SO_4 pare non corrisponda ad un composto e sia della stessa natura di quello che comparisce nel sistema $BaSO_4$ - K_2SO_4 , che in parte costituisce un tipo di curva già discussa teoricamente da Roozeboom, ma non frequente nella pratica; questa però non è la prima volta che si incontri.

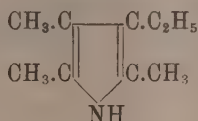
Le complicate reazioni che si possono svolgere tra queste sostanze allo stato solido in queste condizioni non si possono stabilire appunto perchè, se avvengono, il loro effetto termico deve essere nullo o piccolissimo.

(¹) Zeit. f. anorg. Ch. 51, 328.

(²) Zeit. f. phys. Ch. 73. 667.

Chimica — *Sintesi del Fillopirrolo* ⁽¹⁾. Nota di U. COLACCICHI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

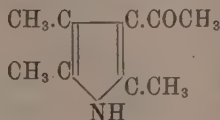
Tra i diversi prodotti di scissione della clorofilla, dell'emina e della ematorporfirina Willstätter ⁽²⁾ potè separare, per mezzo del pierato, un pirrolo tetrasostituito, che, per la sua origine, chiamò fillopirrolo, ed al quale assegnò la formula



Anche H. Fischer e Bartholomäus ⁽³⁾ riducendo l'emina col metodo di Nencki avevano avuto fra mano questa sostanza, che non poterono però identificare, e supposero si trattasse di un derivato idropirrolico. In seguito essi poterono farne la sintesi ⁽⁴⁾ facendo agire il metilato o etilato sodico sopra diversi pirroli ed annunciarono anche di averlo ottenuto dal 2-4-5-trimetil-3-acetilpirrolo e di aver riferito in proposito nell'*Harchiv. für Hygien*, 77. Ma per quanto riguarda questa ultima sintesi io non ho potuto avere notizia, forse perchè il volume non è ancora uscito.

Occupandomi io attualmente della scissione pirogenica di diversi corpi della serie del dipirrilmetano ⁽⁵⁾, il fillopirrolo è venuto a trovarsi nella sfera delle mie ricerche come dimostrano i fatti seguenti:

Scomponendo col calore il derivato del dipirrilmetano che si forma per condensazione della paraldeide col 2-4-dimetil-3-acetilpirrolo ho ottenuto fra gli altri prodotti un trimetilacetilpirrolo ⁽⁶⁾. Per determinare la posizione dell'acetile sono ricorso alla sintesi ed ho preparato dall'isonitrosometiletilchetone e acetilacetone, col metodo di Knorr ⁽⁷⁾ il 2-4-5-trimetil-3-acetilpir-



rolo, il quale non è identico a quello da me precedentemente ottenuto.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Parma, diretto da G. Plancher.

⁽²⁾ Willstätter und Asahina, *Ann. d. chem.*, 385, 188, 225 (1911).

⁽³⁾ H. Fischer-Bartholomäus, *Ber.* 44, 3313 (1911).

⁽⁴⁾ *Id.* *Ber.* 45, 466 (1912).

⁽⁵⁾ *Rend. Acc. Lincei*, vol. XXI (1912), seduta del 3 marzo.

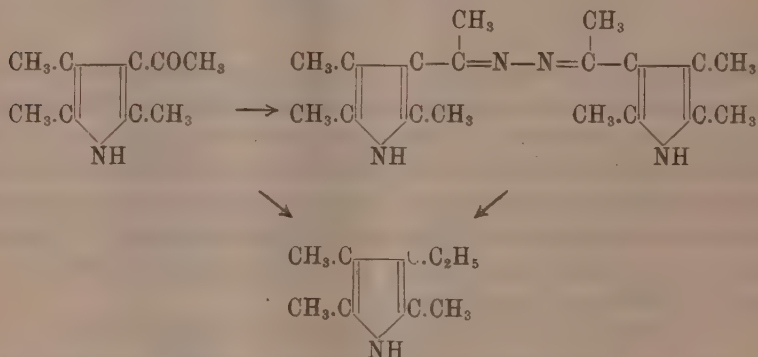
⁽⁶⁾ *Id.* *id.*

⁽⁷⁾ Knorr, *Ann. d. chem.*, 236, 296 (1886), *Ber.* 35, 3004 (1902).

Avendo tentato di saponificarlo con potassa alcoolica in tubo chiuso per poterne confrontare la resistenza con gli altri c-acetilderivati del pirrolo, ho potuto notare che tra i prodotti di distillazione al vapor d'acqua se ne separava uno solido che non era l'acetilderivato originario. Da questa e da diverse altre esperienze mi parve di dover concludere che per questa via l'acetile venisse spostato o sostituito coll'etile, e che anche nel caso degli idrazoni ⁽¹⁾ e delle chetazine ⁽²⁾ l'etilato sodico non operasse la riduzione, ma semplicemente la sostituzione predetta.

I fatti che verrò notando mi confermarono in questa ipotesi.

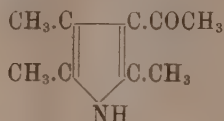
Così ho potuto ottenere tanto dal trimetilacetilpirrolo come dalla corrispondente chetazina, il fillopirrolo.



Questo rende assai più facile la preparazione dei pirroli sostituiti e dimostra che non si richiede la preparazione preventiva degli idrazoni o delle chetazine.

PARTE SPERIMENTALE.

2-4-5-trimetilp-3-acetilpirrolo.



Riducendo col metodo di Knorr ⁽³⁾ un miscuglio di parti equimolecolari di isonitrosometiletilchetone e acetilacetone si forma con rendimento quasi quantitativo il 2-4-5-trimetil-3-acetilpirrolo.

10 gr. di isonitrosometiletilchetone e 10 gr. di acetilacetone sciolti in 100 gr. di acido acetico al 90 % vengono ridotti con 20 gr. di polvere di zinco. Il prodotto della reazione comincia già a separarsi allo stato cristal-

⁽¹⁾ Knorr und Hess, Ber., 44, 2758 (1911).

⁽²⁾ H. Fischer und B., Ber., 44, 3316 (1911).

⁽³⁾ Knorr (loc. cit.).

lino verso la fine dell'operazione. Si completa la reazione scaldando per un quarto d'ora a bagnomaria. dopodichè il liquido viene decantato dallo zinco rimasto inalterato e diluito con tre volumi di acqua. Si ottiene così un abbondante precipitato fioccoso che viene spremuto e lavato con acqua. È poco solubile a freddo in alcool, etere, cloroformio, benzolo, acetone. Cristallizzato dall'alcool assoluto bollente si ottiene in bei prismetti o aghi splendenti incolori. Fonde a 209-210°.

All'analisi ha dato numeri concordanti con la formula $C_9H_{13}NO$.

Calcolato per $C_9H_{13}NO$	Trovato
C % 71,52	71,62
H 8,61	8,74
N 9,27	— 9,47 - 9,61

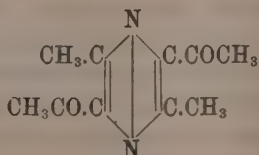
Questo prodotto dà la caratteristica reazione del fuscello di abete; si scioglie in acido cloridrico concentrato, e possiede le proprietà generali degli acetilpirroli.

Chetazina. — Scaldando a bagnomaria quantità equimolecolari di trimetilacetilpirrolo e idrato di idrazina al 50 % finchè il miscuglio diviene fluido, e proseguendo poi il riscaldamento per qualche ora a bagno di sabbia, si ottiene una massa semisolida che è costituita da un miscuglio di chetazina, idrazone e prodotto inalterato che possono venir separati utilizzando la diversa solubilità in alcool assoluto in cui la chetazina è quasi insolubile. L'idrazone viene facilmente trasformato in chetazina scaldandolo qualche ora con alcool assoluto.

Operando la reazione in tubo chiuso a 100° si ha un rendimento in chetazina quasi teorico. Cristallizzata dal nitrobenzolo si ottiene in cristallini prismatici che fondono a circa 305°.

Calcolato per $C_{18}H_{22}N_4$	Trovato
N % 18,80	18,83

Se si applica la reazione di Knorr a parti equimolecolari di isonitrosoacetilacetone e metiletilchetone, in luogo del derivato pirrolico, si ottiene la dimetildiacetilpirazina di Wolff ⁽¹⁾ della composizione $C_{10}H_{12}N_2O_2$, che



prende origine dalla condensazione di 2 molecole di amidoacetilacetone.

⁽¹⁾ Wolff, Ann. d. chem., 325, 19.

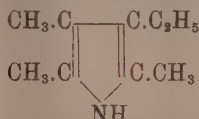
Anche Knorr ⁽¹⁾ aveva accertato che il metiletilchetone come l'acetone non si prestano bene a questo genere di reazioni.

Questa pirazina cristallizza dall'alcool diluito in aghi giallo solfo e fonde a 99°.

Calcolato per $C_{10}H_{11}N_2O_2$	Trovato
N % 14,58	14,81

SINTESI DEL FILLOPIRROLO

dal 2-4-5-trimetil-3-acetilpirrolo



Gr. 2 di trimetilacetilpirrolo vennero scaldati con 2 gr. di sodio sciolti in 20 cc. di alcool assoluto, in tubo chiuso riempito di azoto, per 14-16 ore alla temperatura di 210-225°. Nell'apertura dei tubi si nota una forte pressione, e i gas che si svolgono hanno l'odore caratteristico degli idrocarburi non saturi e bruciano con fiamma luminosa. Il prodotto della reazione che è costituito da una massa cristallina bianca, per diluizione con acqua separa uno strato oleoso che viene estratto con etere, e dopo eliminazione del solvente sottoposto alla distillazione in corrente di vapor d'acqua. Passa una bella sostanza oleosa quasi incolore che solidifica in parte nella canna del refrigerante. Il distillato ben raffreddato viene filtrato; così si separa la maggior parte del prodotto, che spremuto su carta da filtro e cristallizzato una volta dall'alcool diluito forma delle belle scagliette poco colorate che già in questo stato, fondono a 64-65°. Il prodotto così ottenuto venne lasciato per un'ora su anidride fosforica, poi analizzato.

Calcolato per $C_9H_{15}N$	Trovato
C % 78,83	78,23
H 10,95	11,05
N 10,22	10,35

Picrato. — Gr. 0,5 di fillopirrolo sciolti in 100 cc. di etere umido vennero addizionati di gr. 0,8 circa di acido pierico agitando continuamente per circa un'ora. Mentre l'acido pierico va sciogliendosi si forma il picrato che viene poi filtrato e lavato con poco etere. Cristallizzato una volta dall'alcool si ottiene in prismetti giallo-bruni che fondono a 101-103°. Anche il picrato, come il fillopirrolo, si altera facilmente all'aria.

Calcolato per $C_{15}H_{18}N_4O_7$	Trovato
N % 15,30	15,49

(¹) Knorr, Ber. 35, 3008.

FILLOPIRROLO DALLA CHETAZINA DEL 2-4-5-TRIMETIL-3-ACETILPIRROLO.

Gr. 2 di chetazina vennero scaldati con 2 gr. di sodio e 20 cc. di alcool per 14 ore alla temperatura di 200-225°. Nell'aprire i tubi si osservano gli stessi fatti sopraccennati, e la separazione del fillopirrolo viene operata nello stesso modo. Il prodotto appena distillato al vapor d'acqua e spremuto su carta da filtro fonde a 64°. Per l'analisi venne tenuto nel vuoto prima su acido solforico, poi su P_2O_5 .

È identico a quello descritto precedentemente. Tanto questo che il sud-descritto ulteriormente cristallizzati si portano a fondere a 66-67°; però con gravi perdite di prodotto, giacchè si alterano facilmente all'aria.

Calcolato per $C_9H_{15}N$		Trovato
N %	10,22	10,62

Insieme al composto descritto si formano in piccole quantità altri prodotti che studierò in seguito.

Ringrazio il laureando sig. Cesare Bertoni per l'aiuto prestatomi in queste ricerche.

Chimica. — *Analisi termica di miscele binarie di cloruri di elementi monovalenti*⁽¹⁾. Nota III di C. SANDONNINI e P. C. AUREGGI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

In una serie di Note antecedenti⁽²⁾ furono esposti i risultati dell'analisi termica delle miscele binarie tra cloruri di elementi monovalenti e precisamente di quelle tra i cloruri di litio, sodio, potassio, rubidio, rame (rameoso), argento, tallio (tallosi). Fra queste restano ancora da esporre i risultati ottenuti sperimentando sulle miscele di cloruro di rubidio e cloruro rameoso. Scopo della presente Nota è appunto esporre i risultati dell'esame termico corredati da alcune ricerche per altra via, che si resero necessarie per l'interpretazione esatta del sistema.

Il diagramma di solidificazione risulta abbastanza complicato. Dal punto di solidificazione del cloruro di rubidio puro (716°) la curva di cristallizzazione primaria discende sino a circa 252° e a 51 mol. % di $CuCl$ ove

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale dell'Università di Padova, diretto dal prof. G. Bruni.

(2) Questi Rendiconti. 20, 1° sem., 457, 758; 2° sem., 588.

notasi un evidente gomito, per discendere ulteriormente sino a circa 190° e a 60 mol % di cloruro rameoso ove si nota un nuovo gomito; finalmente la curva di cristallizzazione primaria discende ad un punto eutettico a 150° e a 68 mol % di CuCl , per risalire infine direttamente al punto di solidificazione del cloruro rameoso puro (422°).

Le curve di raffreddamento delle miscele da 0 a 51 mol % di CuCl presentano, oltre all'inizio di cristallizzazione, un punto di arresto a temperature variabili da 232° a 260° , le cui durate non sono esattamente calcolabili, ma sono massime a 30, 33.3, 35 mol % di CuCl . Le curve di raffreddamento delle miscele da 20 a 60 mol % presentano inoltre un nuovo arresto a temperature variabili da 180° a 190° , il cui massimo di durata sta fra 53 e 60 mol %; quelle delle miscele da 60 a 100 mol % presentano oltre all'inizio di cristallizzazione solamente l'arresto eutettico a 150° , che si nota anche a concentrazioni molto inferiori di 60 mol % di CuCl . Inoltre le curve di raffreddamento delle miscele a 20, 30, 33.3, 35.40 presentano un netto punto d'arresto a 105° , cosicchè per certe concentrazioni, p. es. 40 mol % di CuCl , la curva di raffreddamento corrispondente presenta, oltre all'inizio di cristallizzazione, altri quattro punti di arresto.

Le temperature di arresto tanto a 250° quanto a 190° non possono corrispondere che alla formazione di due composti decomponibili per fusione, essendo da escludersi che l'arresto a 190° spetti ad una trasformazione allo stato solido del composto che si forma a 250° , per il fatto che mentre per quest'ultimo le durate di arresto sono massime per miscele da 20 a 40 mol % di CuCl , per il punto di arresto a 190° sono massime tra il 40 e 60 mol % di CuCl . L'arresto a 105° che si nota nelle curve di raffreddamento di alcune miscele (la miscela eutettica ha la sua temperatura di solidificazione a 150°) spetta certamente ad una trasformazione allo stato solido del composto che ha la sua temperatura di formazione a 250° , essendochè già per miscele a 50 mol % di CuCl detto arresto non è più visibile.

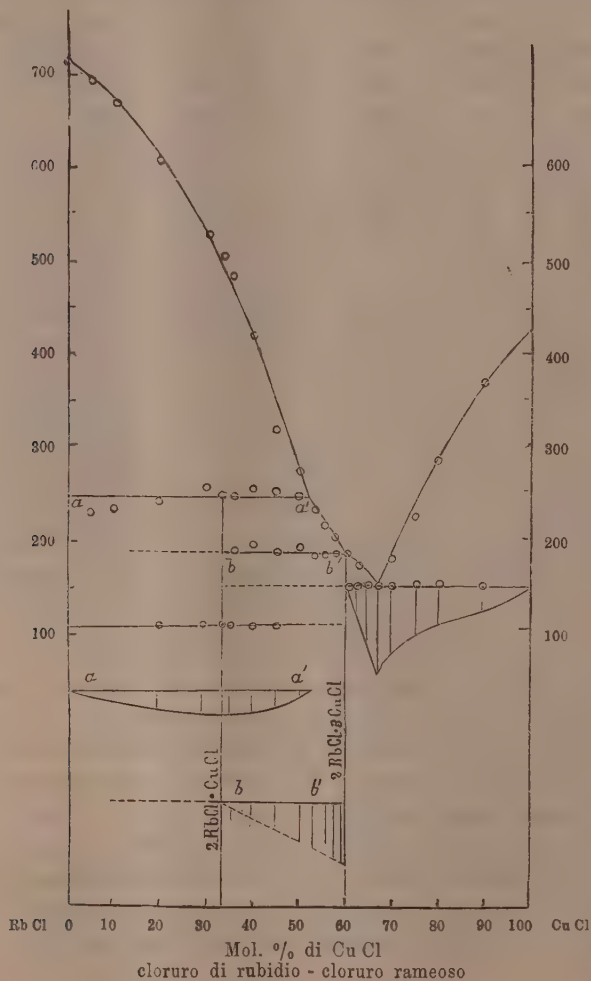
TABELLA.

Molecole % di Cu Cl	Temperature di cristallizza- zione primaria	Primo arresto	Durate in secondi	Secondo arresto	Durate in secondi	Arresto eutettico	Durate in secondi	Temperatura di trasforma- zione 2E ₂ Cl · CuCl
0	716°	—	—	—	—	—	—	—
5	694	232°	—	—	—	—	—	—
10	668	237	—	—	—	—	—	—
20	605	243	50''	192°	—	—	—	106°
30	527	255	80	183	50''	—	—	105
33.3	485	250	80	190	80	148°	—	105
35	470	250	80	186	60	—	—	104
40	412	260	40	192	90	150	—	105
45	300	250	60	185	110	—	—	104
50	274	248	20	190	170	—	—	—
53	220	—	—	180	120	150	—	—
55	210	—	—	183	160	—	—	—
58	200	—	—	180	250	148	—	—
60	180	—	—	180	250	147	80''	—
63	172	—	—	—	—	150	100	—
65	?	—	—	—	—	149	250	—
68	eutettico	—	—	1°	—	150	380	—
70	180	—	—	—	—	148	250	—
75	210	—	—	—	—	150	200	—
80	278	—	—	—	—	150	160	—
90	370	—	—	—	—	145	100	—
100	422	—	—	—	—	—	—	—

In quanto poi alla composizione esatta dei due composti che si formano, sono da farsi alcune considerazioni. Un calcolo esatto delle durate dei loro punti di arresto non è possibile per la difficoltà di avere letture esatte; nè lo scomparire dell'arresto eutettico può essere di schiarimento, nè da esso si può dedurre alcuna conclusione, per il fatto che l'arresto stesso a volte apparisce a concentrazioni elevatissime in cloruro di rubidio, certamente di molto superiori a quella che gli spetterebbe, per il noto caso anomale studiato da Tammann (1), nel quale la reazione che dà origine al composto non avviene completamente, e la parte di miscela ancor fusa cristallizza alla temperatura eutettica.

(1) Zeit. f. an. Ch., 45, 24 (1905).

Nel diagramma per semplificazione le durate degli arresti a 250° e a 190° sono state portate in segmenti proporzionali ai tempi e perpendicolari alle orizzontali $a a'$, e $b b'$. Non sono riportate le durate d'arresto a 105° e di questo son segnati con circoletto solo i punti di durata massima e questi riuniti con una retta continua; con tratteggiata per quelle concentrazioni alle quali si ha brevissima durata o l'arresto non appare addirittura. Con linea tratteggiata sono pure riuniti i punti che appariscono anormalmente, dato che ai composti che si formano spetta la composizione che verrà in seguito stabilita.



Per analogia cogli altri composti già noti, che i cloruri dei metalli alcalini del gruppo del potassio danno col cloruro rameoso, non si può trarre

alcuna deduzione, essendo che mentre per il cloruro di potassio ne è noto uno solo ($2\text{KCl} \cdot \text{CuCl}$) trovato da soluzione acquosa dei componenti da Mitscherlich ⁽¹⁾ e confermato per via termica da uno di noi ⁽²⁾, da Poma e Gabbi ⁽³⁾ e da De Cesaris ⁽⁴⁾; per il cloruro di cesio ne furono trovati, benchè solamente per via umida, due, ma diversi entrambi da quello del cloruro potassico e cioè $3\text{CsCl} \cdot 2\text{CuCl}$ e $\text{CsCl} \cdot 2\text{CuCl}$ ⁽⁵⁾.

Poichè pel sistema $\text{KCl} - \text{CuCl}$ si era avuto buon accordo fra i risultati dell'analisi termica e quelli della preparazione da soluzioni, noi abbiamo voluto seguire quest'ultimo metodo anche pel presente sistema.

Il modo di preparazione da noi seguito è simile a quello usato da Wells (loco cit.) per i composti tra cloruro di cesio e cloruro rameoso. Ad una soluzione di cloruro di rubidio, acida per acido cloridrico venne aggiunto cloruro rameoso e rame metallico per impedire il passaggio a sale rameico. Se la soluzione contiene eccesso di cloruro di rubidio, dopo completa dissoluzione del cloruro rameoso a caldo, per raffreddamento dei bianchissimi aghi, lunghi talvolta qualche centimetro. Fuori dell'acqua madre ed in presenza di umidità, questi cristalli divengono giallicci e poi assumono una tinta nettamente verde; l'acqua li decompone dando un residuo polverulento di cloruro rameoso. Tuttavia estratti dall'acqua madre e rapidamente asciugati tra carta assorbente, essi sono perfettamente stabili. La loro formazione è legata da limiti molto larghi di concentrazione della soluzione in cloruro di rubidio.

Analizzati tre campioni separatamente preparati, essi diedero i seguenti risultati:

	Trovato			Calcolato per $2\text{RbCl} \cdot \text{CuCl}$
	I	II	III	
Cu %	18.65	18.54	18.59	18.65
Rb	—	50.15	49.85	50.14
Cl	—	31.4	—	31.21
				<hr/> 100.00

Le percentuali trovate corrispondono perfettamente a quelle calcolate per $2\text{RbCl} \cdot \text{CuCl}$; dai risultati ottenuti si vede chiaramente che il composto cristallizza senza acqua di cristallizzazione.

Se la concentrazione della soluzione è assai forte in cloruro rameoso, questo si deposita per primo in cristallini duri e bianchi, ma aumentando

⁽¹⁾ Ann. de Chim. et Phys., 72, 384 (1830).

⁽²⁾ Rendiconti Acc. Lincei, 20, 1° semestre, 457 (1911).

⁽³⁾ Id., ibid., 464 (1911).

⁽⁴⁾ Id., ibid., 597 (1911).

⁽⁵⁾ Wells-Zeitschr. f. an. Ch., 5, 304 (1894).

la concentrazione in cloruro di rubidio si ottengono scagliette grigiastre decomponibilissime, i cui limiti di deposizione sono abbastanza ristretti, e che sottoposte all'analisi diedero i seguenti risultati:

	Trovato			Calcolato per 2 Rb Cl · 3 Cu Cl
	I	II	III	
Cu %	35.60	35.70	35.22	35.39
Rb	—	31.25	32.10	31.71
Cl	—	32.78	—	32.90
				100.00

Come si vede anche in questo caso il composto cristallizza senz'acqua di cristallizzazione; la sua composizione è $2 \text{ Rb Cl} \cdot 3 \text{ Cu Cl}$. Di questo tipo è noto un composto tra cloruro ammonico e cloruro rameoso $2 \text{ NH}_4 \text{ Cl} \cdot 3 \text{ Cu Cl}$ (¹).

Ammettendo ora che tali composti si formino anche per fusione dei componenti e riportando nel diagramma di solidificazione queste percentuali, l'arresto a 250° spetterebbe al composto $2 \text{ Rb Cl} \cdot \text{Cu Cl}$ analogo al composto $2 \text{ KCl} \cdot \text{Cu Cl}$, quello a 190° al composto $2 \text{ Rb Cl} \cdot 3 \text{ Cu Cl}$, che viene così ad essere un composto decomponibile alla fusione, la cui temperatura di decomposizione coincide col massimo che gli spetterebbe, e finalmente l'arresto a 105° si deve ad una trasformazione allo stato solido del composto $2 \text{ Rb Cl} \cdot \text{Cu Cl}$.

Come si può chiaramente vedere dal diagramma e dalla tabella, oltre che l'arresto eutettico anche l'arresto dovuto alla formazione di $2 \text{ Rb Cl} \cdot 3 \text{ Cu Cl}$ appare a concentrazioni di molto superiori in cloruro di rubidio di quella del primo composto, rendendo così impossibile l'interpretazione esatta del diagramma.

La formazione del composto $2 \text{ KCl} \cdot \text{Cu Cl}$ tanto da soluzioni acquose quanto per fusione dei componenti rende lecita la deduzione che anche questi composti tra il cloruro di rubidio e il cloruro rameoso si comportino allo stesso modo, e che cioè la composizione dei composti che si formano da soluzione sia la stessa di quelli formantisi per fusione.

Come ho già fatto rilevare in una Nota (²) riassuntiva pare dai risultati ora esposti che la tendenza a dare complessi col cloruro rameoso, aumenti col crescere del peso atomico dei metalli alcalini. Io avevo perciò deciso di sperimentare col cloruro di cesio, anche perchè, come fu già detto, complessi tra questo sale ed il cloruro rameoso erano già noti e studiati per via umida. Non mi fu finora possibile attuare questo proposito perchè da nessuna delle principali case di prodotti chimici ci riuscì di procurarci la quantità necessaria di questo prodotto.

(¹) Wells e Hulburt. Z. f. an. Ch., 10, 157 (1895).

(²) Questi Rendiconti, 20, 2° semestre, 503 (1911).

Chimica. — *Sulla presenza dell'acido cianidrico libero nelle piante*. Nota II di C. RAVENNA e V. BARBIERI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Chimica. — *Il sistema Sb_2S_3-SnS* . Nota di N. PARRAVANO e P. DE CESARIS, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

Le due Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica terrestre. — *Misure della temperatura della lava fluente dell'Etna* ⁽¹⁾. Nota di GIOVANNI PLATANIA, presentata dal Socio A. RICCÒ.

La determinazione della temperatura della lava fluente è uno dei più importanti problemi riguardanti lo studio fisico dei vulcani.

Eppure le misure dirette di essa sono notevolmente scarse: in occasione di eruzioni etnee, oltre alle determinazioni — poco sicure — eseguite per mezzo della fusione dei metalli, sono stati adoperati il metodo calorimetrico (Bartoli, 1891) e quello di un pirometro fotometrico ad assorbimento (Od-done, 1910).

Il prof. G. P. Grimaldi, direttore dell'Istituto Fisico dell'Università di Catania, aveva ritirato, nel dicembre 1910, un pirometro a radiazione di Féry ⁽²⁾ (N.° T. 341, G. 362) della *Cambridge Scientific Instrument Company*. Avendolo egli messo gentilmente a mia disposizione, pensai di utilizzarlo per determinare la temperatura superficiale della lava fluente nell'eruzione etnea, cominciata il 10 settembre dello scorso anno 1911.

Per diverse circostanze, non potei peraltro recarmi sul posto prima del 17 settembre, e il vento violentissimo del 18-19 mi costrinse a rimanere inoperoso, coi miei compagni, in una casina di campagna nel fianco NE del vulcano, aspettando un tempo meno sfavorevole.

Finalmente il 20 settembre potemmo incamminarci, e visitammo dapprima i crateri più elevati, e poi la lunga serie di piccoli crateri fino alle adiacenze di M. Rosso. Poichè non si udiva alcun boato, e regnava una

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Catania.

⁽²⁾ Féry Ch, *Télescope pyrométrique*. Journ. de Physique, (4) III, 1904, pag. 701.

grande calma, e solo da uno dei crateri più elevati venivan fuori colonne di cenere, così dapprima si credeva che fosse cessata l'emissione di lava fluente. Ma in vicinanza di M. Rosso notammo che era ancora attiva una corrente di lava proveniente dalla più bassa bocca di questa fila di crateri. Collocammo l'apparecchio in un posto che ci sembrò opportuno, sopra una corrente di lava già raffreddata, a circa 15 metri dalla sponda della colata, a 80 metri dalla bocca. La lava si vedeva fluire silenziosa, con velocità moderata, che nella parte centrale della colata fu valutata di circa mezzo metro al secondo. La larghezza del fiume di lava, in quel posto, fu stimata di 6 m., e l'inclinazione del 10 %. La superficie della lava fluente era convessa, con una saetta di incurvamento di circa mezzo metro.

Intanto sopravvenne la sera e si eseguirono le misure: il prof. G. Trovato-Castorina, dottore in fisica, faceva le letture al galvanometro e ne dettava i valori a mio nipote Franco e il sig. Giuseppe Di Mauro, aiuto meccanico dell'Istituto fisico, aveva cura del galvanometro, collocato sulla cassetta da viaggio, badando che rimanesse convenientemente sospeso, poichè la corrente di lava, superficialmente raffreddata, sulla quale ci trovavamo, aveva un lento moto di deriva.

La superficie della lava fluente era mazzata da scorie, nereggianti sul fondo rosso-arancione del magma. Io badavo a rivolgere l'apparecchio in modo da ottenere nel campo del telescopio l'immagine di una macchia rossa, evitando le scorie nere o anche meno incandescenti, e a seguire nel suo corso tale macchia. Ciò riusciva malagevole, e l'ago del galvanometro ritornava di frequente verso zero. In questa prima serie di letture si ottennero cifre relativamente basse: intorno a 560°, 640°, 660°, 680°, 770°. Questi non erano valori della temperatura superficiale della lava rossa fluente, perchè a quella distanza non riusciva facile evitare che le scorie fossero nel campo. Potevano considerarsi come valori della temperatura media della porzione di superficie di lava e di scorie compresa nel campo dello strumento. La temperatura era più o meno elevata secondo la maggiore o minore estensione di lava rosseggiante rispetto a quella coperta da scorie (¹).

Avvicinammo perciò lo strumento a soli 4 metri dal margine della colata, riuscendo in questo modo a comprendere nel campo larghe chiazze di rosso. Si ottenne così: 795°, 814°, 825°.

Intanto si vide discendere, trascinato dalla lava, un enorme blocco, che aveva un lento moto di rotolamento. Attesi che esso fosse trascorso alquanto a valle, affinchè si scorgesse una parte più estesa della superficie posteriore incandescente, la quale presentava un color rosso più chiaro. Ottenni allora

(¹) Il Daly (Proc. Amer. Acad. of Arts and Sciences, XLVII, 3, 1911, pag. 73) da misure eseguite con un pirometro di Féry nel 1909, stimò che le scorie (*scum*) non incandescenti del lago di lava del Kilauea avessero una temperatura media di 450° C.

940°, e poi, dopo alcuni secondi, 924°, forse anche perchè il moto del blocco e il suo allontanamento impedivano che la parte più viva rimanesse tutta nel campo.

La massima temperatura ottenuta, nelle condizioni descritte, fu dunque 940°, valore che, al pari dei precedenti, deve ritenersi come limite inferiore, sia per l'assorbimento prodotto dai fumi eruttivi, emessi dalla lava, sia perchè il radio-pirometro di Féry — basato sulla legge di Stefan-Bartoli, riguardante il raggiamento integrale di un corpo affatto nero — dà la così detta temperatura nera.

La prima causa di errore doveva essere piccola, perchè i fumi erano, in quella sera, molto radi.

Rispetto al divario fra la temperatura effettiva della lava fluente e la temperatura nera indicata dal pirometro, non si possiedono dati sperimentali sicuri.

Il pirometro era stato campionato dalla stessa Casa costruttrice nel dicembre 1910, e poi, nel dubbio che le esalazioni vulcaniche avessero potuto produrre delle modificazioni, fu mandato, dopo le misure, alla medesima Casa per un nuovo campionamento. Da questo risultò che lo specchio dorato non aveva subito modificazioni apprezzabili e che le variazioni delle indicazioni non superavano l'1%. Alle letture della seconda serie, eseguite a minore distanza dalla lava, ho applicato le correzioni date da questo secondo campionamento.

Importa pure notare che in quel giorno i fenomeni eruttivi erano nel periodo finale, e che l'emissione di lava, da quella bocca, dopo qualche giorno cessò interamente: il 24 settembre le bocche eruttive non più emettevano lava.

Il prof. Bartoli — del quale ebbi la fortuna di essere allievo — adoperò, come ho accennato, il metodo calorimetrico, con l'abilità di valente sperimentatore da tutti riconosciuta. Nell'eruzione etnea del 1892, durata quasi sei mesi (9 luglio - 30 dicembre), egli poté avvicinarsi a circa 2 metri da una corrente di lava: in agosto eseguì 15 determinazioni ⁽¹⁾, non lontano dalla sorgente, a un metro di profondità, e i valori più elevati furono 1060°, 990°, 980°, 870°. Circa un mese dopo ⁽²⁾ fu in grado di compiere, nello stesso posto, una seconda serie di misure, ottenendo 1086°, 1038°, 1005°, 997°, 992°, 987°, 982°, 978°, 976°.

È da notare che diversi autori, nel riportare queste determinazioni del Bartoli, tralasciano i valori della seconda serie, e citano, come massima temperatura, il valore di 1060°. D'altra parte non è esatto parlare di temperature massime, poichè, essendo uguali, per ciascuna serie, le condizioni delle misure, deve darsi, ad ognuno dei valori pubblicati dal Bartoli, lo stesso peso. Si ottengono perciò le temperature medie T seguenti:

$$\text{per la 1ª serie} \quad T = 1000^\circ \pm 14^\circ$$

$$\text{” ” 2ª ”} \quad T = 1003^\circ \pm 7^\circ,$$

⁽¹⁾ Bartoli A., Boll. mens. Soc. meteor. ital. (2) XII, 1892.

⁽²⁾ Bartoli A., Rend. R. Ist. Lombardo di sc. e lett. (2) XXIX, 1896.

con una soddisfacente precisione, tanto più se si considerano le difficoltà sperimentali da superare e le molteplici cause di errore da evitare, tali che lo indussero a rigettare, nella 1^a serie, i valori meno elevati.

Due chilometri più in basso dalla sorgente, con lo stesso metodo, operando perciò sulla lava fluente, egli ottenne $T = 815^{\circ} \pm 18^{\circ}$.

Il dott. Oddone, studiando l'eruzione etnea del 1910 ⁽¹⁾, non ottenne buoni risultati dall'uso dei coni fusibili di Seger; adoperò poi un semplice pirometro fotometrico a cuneo assorbente, scegliendo, per il confronto, le temperature di fusione della ghisa e dell'acciaio, « corpi che allo stato fluido - egli dice - danno pur essi uno spettro continuo non dissimile da quello delle lave ». Questo metodo gli diede valori elevati: alle bocche, alle pseudo-bocche e nella parte centrale delle colate, dove la lava splendeva di color bianco, la temperatura superficiale sarebbe stata circa 1200°; per la lava di color oro zecchino, circa 1150; per quella che mostrava un color rosso aranciato, 1050; e per la lava rappresa di color rosso nascente, < 1000.

Le numerose ricerche di A. Brun ⁽²⁾, eseguite in laboratorio, intorno alla temperatura di esplosione e alla temperatura di fusione delle lave, sono molto importanti; ma le determinazioni di temperature di lava fluente, da lui fatte *in situ*, a stima, fondandosi sull'intensità di radiazione visibile delle lave incandescenti, in diversi vulcani, non offrono la sicurezza delle misure strumentali.

Non è opportuno confrontare e discutere i risultati delle misure fatte dal Bartoli, dall'Oddone e da me, essendo molto diversi i metodi e le condizioni di esperimento. Occorrono ancora molte altre determinazioni, eseguite sistematicamente.

Peraltro, il risultato da me ottenuto, sperimentando con una lava emessa nel periodo finale dell'eruzione, non è senza importanza. Esso mostra altresì che il radio-pirometro di Féry è un apparecchio pratico e di maneggio relativamente facile. In condizioni favorevoli, quando le correnti di lava siano libere da scorie superficiali, o quando formino cascate, o quando sia possibile — il che non avviene molto di rado — avvicinarsi alle bocche di emissione, si possono ottenere valori che, in ogni caso, è importante conoscere; e si potrà raggiungere una grande precisione quando si faranno determinazioni del grado di nerezza della lava, ad alta temperatura. Sarà utile poi il confronto tra la temperatura superficiale della lava fluente nella parte centrale, più veloce, della colata, con quella delle parti laterali e con quella che in circostanze favorevoli si può ottenere immergendo, presso il margine del fiume lavico, un pirometro termo-elettrico.

(1) Oddone E., Boll. Soc. Sismol. Ital., XIV, 1910.

(2) Brun A., *Recherches sur l'exhalation volcanique*. Genève-Paris, 1911.

Talassografia. — Dove si sviluppano le Globigerine? ⁽¹⁾.
Nota di RAFFAELE ISSEL, presentata dal Socio B. GRASSI.

Chi ha seguito i recenti progressi della biologia marina avrà notato come non solamente organismi di rara e difficile cattura siano ancora poco noti per quanto riguarda il modo di esistenza nelle varie fasi del ciclo vitale, ma come incertezze non meno gravi regnino talvolta intorno alla vita di specie volgarissime e largamente diffuse. Tale è appunto il caso dei foraminiferi appartenenti al gen. *Globigerina* D'Orb.

Le globigerine attualmente viventi si possono raggruppare in un certo numero di specie, non sempre ben definite; il Brady ⁽²⁾, nella sua monografia del « Challenger », ne descrive 14. Solo per una globigerina si sono conseguiti dati ecologici sicuri; alludo alla *Gl. pachyderma* (Ehrb.), piccola specie vivente nei mari Artici, alla quale gli autori più recenti, come il Rhumbler ⁽³⁾, attribuiscono una esistenza bentonica in tutte le fasi della vita. Parecchie altre globigerine galleggiano in balia delle onde e vengono recate a bordo viventi dalla rete pelagica, ragione per cui sono da tutti citate come organismi caratteristici del plancton.

Ora, una quistione che interessa talassografi, zoologi e paleontologi, si può riassumere in poche parole, come segue:

I piccoli gusci calcarei di globigerine che si accumulano in quantità stragrande sul fondo del mare, contribuendo potentemente alla formazione dei depositi di alto fondo, sono spoglie d'individui pelagici, oppure provengono, almeno in parte, da individui la cui esistenza trascorre per intero, o in qualche fase soltanto, sul fondo marino?

Non ostante il rinnovarsi frequente delle indagini talassografiche, la quistione si trova oggi allo stesso punto al quale l'ha lasciata il Brady or fa un quarto di secolo.

Io ho avuto la fortuna di poterla in parte risolvere, e di risolverla proprio per la *Globigerina bulloides* D'Orb., che è la più diffusa specie del genere, e forse, in tutto il regno animale, una di quelle rappresentata dal numero più ingente di individui, poichè non solo si trova nel plancton di tutti i mari, ma vive indifferentemente alle più diverse profondità. Per

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Anatomia comparata della R Università di Genova.

(2) Brady H. B. *Report on the « Foraminifera »*. Challenger's Reports, Zoology, vol. IX, 1884.

(3) Rhumbler L. *Die Foraminiferen (Thalamophoren) der Plankton-Expedition*. Erg. d. Plankton-Expedition, Bd. 3, an. 1909.

quanto concerne in modo speciale il nostro Mediterraneo, il Lo Bianco ⁽¹⁾ l'ha osservata in tutte le pesche planctoniche, partendo da una profondità corrispondente a 50 m. di cavo e giungendo sino a quella corrispondente a 1200 (600 m. circa di profondità): e la colloca quindi nel novero di quegli organismi ch'egli denomina « panteplanctonici ».

A più riprese ho studiato, dal punto di vista bionomico, la piccola fauna che si sviluppa in estate lungo la costa di Portofino (Liguria) e cerca rifugio nel feltro epifitico delle foglie di *Posidonia*, foglie che, grazie a condizioni fisiche particolari, galleggiano coi loro apici alla superficie dell'acqua durante la bassa marea ⁽²⁾. Nel corso di queste ricerche mi sono sempre imbattuto in stadi giovanissimi, viventi e vivacemente pigmentati, di una *Globigerina* che il prof. A. Silvestri del R. Liceo di Spoleto, valente specialista per la sistematica dei foraminiferi, ebbe la cortesia di determinarmi come *Gl. bulloides* D'Orb. Queste globigerine sono diffuse in tutti i campi di *Posidonia* esplorati a Portofino, sebbene non molto abbondanti sino a pochi decimetri sotto al livello delle acque magre; scendendo più in basso, ne ho trovato qualche individuo, attaccato alle foglie, sino a 3-4 m. di fondo; nessuno a profondità superiore.

È quindi ben certo che stadi giovanili di «Globigerina bulloides» vivono normalmente in ambiente bentonico e litorale per eccellenza.

Con ciò non voglio escludere che le globigerine possano svilupparsi nel primo periodo della loro vita, anche in condizioni diverse da quelle osservate. E neppure sono in grado di stabilire se gli individui veduti appartengano ad una peculiare varietà di *Globigerina bulloides* che vive nel bentos anche allo stato adulto, oppure se, giunti ad un certo punto, assumano i caratteri e le abitudini ben noti della forma planctonica. Il non aver mai incontrato nelle mie ricerche individui di lunghezza superiore a 40 μ , mentre altri foraminiferi che accompagnano la *Gl. bulloides* raggiungono almeno il minimo di statura indicato dagli autori, mi farebbe credere la seconda ipotesi più probabile della prima.

Intanto il fatto fondamentale, sebbene non indagato in tutte le sue conseguenze, mi pareva per sè stesso tanto importante, da meritare un'apposita Nota.

(¹) Lo Bianco S., *Le pesche abissali eseguite da F. A. Krupp col yacht Puritan nelle adiacenze di Capri ed in altre località del Mediterraneo*. Mitth. Zoolog. Station Neapel, Bd. 16, an. 1903.

(²) Un lavoro *in extenso* sopra questo argomento verrà pubblicato fra non molto, negli Zoologische Jahrbücher, Abth. f. Systematik und Biologie.

Patologia vegetale. — Formazione e significato fisiologico dei cordoni endocellulari nelle viti affette da arricciamento.
Nota di L. PETRI, presentata dal Socio G. CUBONI.

In una Nota precedente ⁽¹⁾ ho brevemente esposto come nelle viti colpite da rachitismo progressivo, conosciuto col nome di *court-noué* o di *roncet*, sia costante la formazione di particolari cordoni solidi, endocellulari, della stessa natura della membrana delle cellule che essi attraversano ⁽²⁾.

Questi cordoni sono completamente simili a quelli già scoperti nelle Conifere da Sanio e in altre piante legnose da Kny, Müller, Raatz. La rarità e l'incostanza con le quali si presentano queste strane appendici della membrana le hanno già fatte considerare come anomalie dovute probabilmente a una causa patogena. È la prima volta però che in una stessa pianta si può stabilire nettamente una stretta correlazione fra la formazione di cordoni endocellulari e un manifesto stato di malattia. Sino alla pubblicazione della mia Nota precedente non erano conosciute tali anomalie che nei tessuti secondari, non potendosi ritenerle omologhe a quei cordoni descritti da Leitgeb ⁽³⁾ nell'epidermide del perigonio di *Galtonia candicans*. Nella corteccia e nel legno i cordoni attraversano un numero più o meno grande di cellule di serie radiali corrispondenti, una prova che in generale i cordoni sono originati nelle iniziali del cambio, le quali li trasmettono alle cellule figlie tanto dal lato del legno che da quello della corteccia. Mai i cordoni, che sono in continuità in due o più cellule contigue della stessa serie, vengono formati indipendentemente gli uni dagli altri.

Raatz si è valso appunto di queste anomalie e del loro modo di trasmissione di cellula in cellula per studiare il comportarsi delle cellule cambiali nella loro attività di divisione.

Alcuni risultati delle mie ricerche, che si riferiscono a un tale argomento, saranno descritti e discussi nella Memoria definitiva.

Processo di formazione dei cordoni nel cambio. — Müller ⁽⁴⁾ ha espresso la convinzione che i cordoni endocellulari si formino da pieghe delle

⁽¹⁾ Questi Rendiconti, vol. XX, serie 5^a, secondo semestre, pag. 155.

⁽²⁾ Questo carattere mi ha permesso di confermare l'opinione, già espressa da molti, identificando con tutta sicurezza il vecchio *arricciamento* delle nostre viti col *court-noué* delle viti americane; è per questa ragione che da ora in poi si potrà chiamare con nome italiano una malattia sin qui indicata con denominazioni esotiche, nella credenza che essa non fosse identica alla forma di rachitismo già nota presso di noi.

⁽³⁾ Mitth. Bot. Inst. Graz, I, 1887.

⁽⁴⁾ Ber. d. d. Bot. Ges., VIII, 1890.

pareti radiali delle cellule del cambio. Queste pieghe sarebbero in parte riassorbite e ne resterebbe solo la porzione estrema, che a guisa di un ponte unirebbe le due pareti tangenziali attraversando la cavità cellulare in direzione radiale.

Müller esclude che si tratti di una trasformazione in cellulosa di un preliminare cordone di plasma che si formerebbe nell'iniziale; come pure esclude che i cordoni si possano considerare come una parete trasversa fenestrata, in cui la perforazione sia straordinariamente esagerata. Raatz ⁽¹⁾ ha dimostrato come la spiegazione data da Müller non sia accettabile ed ha cercato di sostituirla con un'altra, desunta da numerosissime ed accurate ricerche. Secondo Raatz i cordoni endocellulari sono equivalenti, geneticamente, alle saldature che, per collabescenza, avvengono fra le pareti tangenziali di una stessa cellula cambiale ed equivalgono anche ai tramezzi parziali. I cordoni, durante l'accrescimento della cellula, deriverebbero da un accumulo di cellulosa, la cui formazione nel plasma, *per un processo ancora sconosciuto*, sarebbe determinata dal contatto stesso delle pareti tangenziali.

Il materiale, che mi ha servito per studiare il modo di formazione dei cordoni nel cambio delle viti affette da arricciamiento, venne raccolto in maggio e fissato con liquido di Kleinemberg modificato, e liquido di Flemming. Le sezioni radiali, tangenziali e trasverse, eseguite al microtomo, furono colorite col metodo di Heidenhain e safranina o fucsina, ora basica ora acida. Le sezioni longitudinali radiali sono le più dimostrative per mostrare il processo di formazione di cordoni.

Le cellule della zona mediana del cambio ⁽²⁾ presentano grossi nuclei con granuli di cromatina fortemente colorabili, e un nucleolo che fissa quasi costantemente la fucsina basica. In quelle cellule che sono vicine ad altre, le quali hanno già dato origine a uno o più cordoni, si osservano delle massule, della grandezza circa del nucleolo, alcune volte anche più grandi, vacuolate, colorantisi in grigio bluastrò con l'ematossilina ferrica.

Alcune volte sono a contatto col nucleo, altre volte aderenti allo strato parietale del citoplasma o nel mezzo di questo (cfr. la figura qui unita).

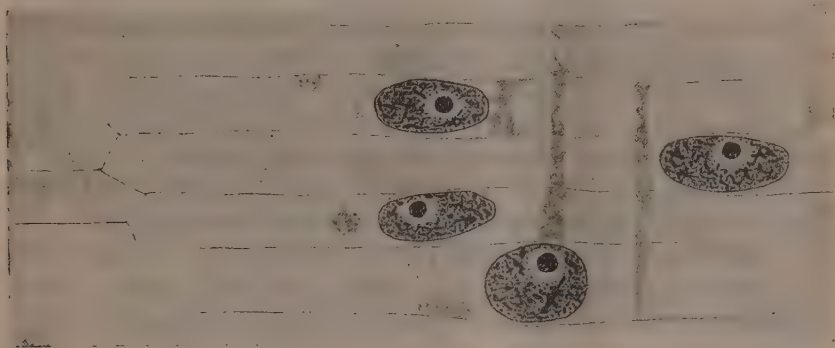
Le masse più grandi sembrano risultare dall'aggregarsi e dal fondersi insieme di più corpuscoli da prima isolati nel trofoplasma. Queste massule grigie, che chiamo *corpi d'escrezione*, non hanno niente a che fare con i corpuscoli nucleolari extranucleari descritti in alcuni casi, nè con plastidi, nè aggregati di condriosomi; esse rappresentano i primordi dei cordoni endocellulari. Questi ultimi, infatti, all'inizio sono costituiti esclusivamente dalla riunione di tali corpi d'escrezione in agglomerati più o meno compatti e

⁽¹⁾ Jahr. für wiss. Bot. XXIII, 1892.

⁽²⁾ Nei primi periodi della sua attività il cambio nelle viti da me esaminate è un *etagecambium* nel senso di Schoute (Verk. k. Acad. Wet. Amsterdam, 1902).

irregolari che finiscono per saldarsi allo strato parietale del citoplasma. È solo dopo che è avvenuta la divisione cellulare che si osserva una saldatura del cordone rudimentale con le pareti tangenziali. Io non posso escludere però che una fusione dei corpi d'escrezione con queste ultime possa anche avvenire nella cellula allo stato di riposo quando l'agglomerato iniziale raggiunge in lunghezza il diametro trasverso della cellula o quando le pareti tangenziali, per un incurvamento, si avvicinino fra loro sino a toccare il corpo di escrezione.

In questi casi, senza dubbio, lo strato parietale del protoplasma deve partecipare al processo di saldatura, interrompendosi al punto di contatto e ricostituendosi intorno all'agglomerato d'unione interposto fra le due pareti, il quale, in seguito, resta rivestito di un sottile strato cellulosico che è in continuità con la lamella interna delle pareti tangenziali.



Generalmente però i cordoni si formano in vicinanza del nucleo dove la cellula presenta la maggiore distanza fra le pareti tangenziali e dove quindi non possono avvenire contatti fra queste ultime. Spesso si vedono briglie cinoplasmiche che collegano il nucleo al cordone in formazione, quando ancora è costituito da una sostanza vacuolata di forma irregolare.

Non ho mai osservato il differenziarsi di un cordone protoplasmatico e la sua graduale trasformazione in cordone cellulosico secondo un processo che è già stato osservato in altri casi di formazioni endocellulari della stessa natura della parete. Il primo abbozzo di un cordone si allunga, per stiramento, con l'accrescimento della cellula, e nella divisione viene tagliato dal nuovo setto, continuandosi così nella cellula figlia. È nel costituirsi della nuova membrana, nel succedersi delle divisioni, che il cordone iniziale viene a far parte delle pareti cellulari come una semplice appendice, giacché l'agglomerato primitivo è ormai completamente isolato dal protoplasto per mezzo di un sottilissimo strato di cellulosa. Da questo momento la sostanza del cordone è paragonabile alla lamella mediana di una membrana; lo strato parietale

del citoplasma iniziando la secrezione di un rivestimento cellulosico pone quest'ultimo in continuità con la lamella interna delle pareti tangenziali, in tal modo la nuova appendice di queste subirà lo stesso loro differenziamento negli ulteriori stadi definitivi della cellula.

Nella formazione dei cordoni endocellulari si ha dunque dapprima un processo di secrezione in seno al trofoplasma, seguito da un incapsulamento del secreto per mezzo di un rivestimento secondario di cellulosa che è in continuità con la membrana cellulare.

Non si tratta dunque della formazione di un'appendice della membrana che si possa riguardare come un *geformtes Sekret* nel senso di Biedermann ⁽¹⁾, ma piuttosto di un processo paragonabile a quello che si verifica in alcuni casi di cellule invase da parassiti che vengono isolati dal protoplasto vivente, mediante un involucro di cellulosa ⁽²⁾.

Il modo di trasmissione, del tutto passivo, dei cordoni da cellula a cellula è paragonabile a quello per cui gl' *ifoidi* dei tubercoli radicali delle Leguminose si diffondono nel parenchima a batteroidi. Il contenuto degli ifoidi appartiene al simbionte batterico, mentre l'involucro cellulosico è una secrezione della cellula ospite ed è in continuità con la parete ordinaria. Gl' *ifoidi* si propagano per mezzo della proliferazione stessa delle cellule, nelle quali sono contenuti, come semplici appendici delle pareti; allo stesso modo cioè dei cordoni endocellulari nella proliferazione del cambio.

Allo stato attuale delle mie ricerche considero i *corpi d'escrezione* come della sostanza pectica della natura delle gomme, molto affine a quelle sostanze che in massima parte costituiscono le pareti cellulari appena formate. Probabilmente si tratta di un prodotto di scissione di composti albuminoidi del trofoplasma sotto l'azione di uno stimolo patologico; un processo paragonabile alla gommosi di origine esclusivamente endoplasmica come Tschirch ⁽²⁾ ha osservato in alcune piante in seguito a ferite. Data la natura embrionale delle cellule nelle quali avviene questa secrezione, essa riveste dei caratteri tutt'affatto particolari dei quali il più saliente è la formazione dei cordoni endocellulari.

Questa mia spiegazione solo apparentemente può sembrare in aperto contrasto con quella data da Raatz. In realtà si tratta di una più esatta interpretazione di alcuni fatti e di un contributo di nuove osservazioni che vengono a sostituire un'ipotesi nella concezione del botanico tedesco. Secondo Raatz sono i contatti delle pareti tangenziali che determinano una saldatura di quest'ultime, immaginando che il contatto stesso provochi una elaborazione

⁽¹⁾ Verworn's Zeitschr. f. allg. Physiol., II, 1902.

⁽²⁾ Per esempio l'incapsulamento dei grovigli di ife nelle cellule delle micorize di *Neottia nidus avis* (Magnus).

⁽³⁾ Ber. d. d. Bot. Ges., 1888.

di cellulosa che, come una massa semifluida, viene poi stirata in cordone. Restava alquanto incomprensibile in qual modo un contatto fortuito fra pareti potesse determinare la formazione di cellulosa in seno al protoplasto, e per quale ragione ciò non dovesse avvenire tutte le volte che simili contatti si verificassero. Si è visto come, secondo le mie ricerche, la saldatura fra le pareti tangenziali non rappresenta altro che una conseguenza di una precedente secrezione nel citoplasma di una sostanza chimicamente affine a quella delle giovani membrane cellulari e che costituisce la prima manifestazione visibile del processo di formazione dei cordoni ⁽¹⁾.

Trasmissione dello stimolo di formazione dei cordoni. — La natura dello stimolo che promuove nel cambio il processo di secrezione gommosa è per ora completamente sconosciuto, esso non deriva affatto da ferite, almeno nelle viti, giacchè in tutti i casi nei quali non si trattava di arricciamento non ho mai osservato la formazione di cordoni, malgrado la gravità delle ferite e della gommosi del legno che ne deriva. Deve venire pure esclusa l'identità con stimoli derivati da azioni parassitarie già conosciute.

Nel cambio e nell'epidermide di un germoglio in accrescimento lo stimolo di formazione dei cordoni procede in direzione acropeta rispetto al germoglio stesso. Mentre negl' internodi in accrescimento il trovare file di cellule longitudinali cordonate, decorrenti nel cambio per lunghi tratti, deve fare ammettere una diretta trasmissione dello stimolo, per mezzo della divisione, nelle cellule discendenti da una stessa cellula madre, in altri casi questa trasmissione diretta non avviene. Ciò si verifica sempre negl' innesti di marze sane sopra soggetti ammalati. In questi casi è sorprendente la rapidità relativa con cui alla gemma in sviluppo è indotto lo stimolo di formazione dei cordoni attraverso tessuti che sino a quel momento mai ne avevano formati. Gli elementi definitivi che derivano dal periblema non presentano alcuna reazione visibile a questo stimolo, e così pure le formazioni primarie del cilindro centrale (fasci procambiali, protoxilema, protofloema), che sono sempre senza cordoni. La direzione ascensionale dello stimolo cessa nella regione superiore del ceppo, dove avviene cioè la diramazione delle cosiddette *spalle*. Da questo punto si ha una trasmissione in senso basipeto, naturalmente non più per mezzo della divisione delle cellule, come può avvenire negli organi con accrescimento in lunghezza.

I germogli basali del ceppo e le radici più alte e più adulte sono gli ultimi organi della pianta che formino cordoni endocellulari, giacchè le radici a struttura primaria e quelle di uno e due anni non ne formano; o

(¹) Per quanto le mie ricerche si riferiscano al cambio delle viti e quelle di Raatz al cambio delle Conifere, per la perfetta identità dei caratteri morfologici dei cordoni endocellulari nelle due categorie di piante, ritengo i risultati sopraesposti applicabili anche al cambio delle Conifere.

solo eccezionalmente quelle di tre, quando si tratti di uno stadio molto avanzato della malattia. Nei germogli basali lo stimolo decorre in direzione acropeta come in quelli superiori. I cordoni epidermici non si iniziano nel dermatogeno, ma nelle cellule che conservano un carattere embrionale durante l'accrescimento intercalare degl'internodi. La trasmissione dello stimolo in senso basipeto nel ceppo è molto più lenta che nel senso inverso; il fatto però che essa sussiste può far supporre che innestando una marza ammalata sopra un soggetto sano possa essere indotto in questo il processo degenerativo del cambio.

Facendo astrazione della resistenza che un soggetto perfettamente sano può opporre, è teoricamente ammissibile che lo stimolo di formazione dei cordoni passi nel soggetto. A una simile questione ne sono collegate molte altre che riguardano la natura stessa della malattia. Noi non sappiamo ancora se in una marza ammalata si compendia tutta intera la malattia, con le sue cause e i suoi effetti, oppure se non vi sieno rappresentati soltanto questi ultimi, rimanendo localizzate le prime o nell'ambiente o nella pianta completa.

Le mie ricerche intorno alla trasmissione dello stimolo di formazione dei cordoni dalla marza ammalata al soggetto sano sono ancora in corso e io ne riferirò in altra Nota.

Per ora mi limito ad ammettere che vi è nella pianta ammalata un centro d'irradiazione di questo processo anormale di secrezione nelle cellule delle zone cambiali, e che questo centro risiede nell'estremità superiore del ceppo. Con ciò intendo di stabilire soltanto quali sieno i tessuti che durante la vita dell'organismo presentano una specifica sensibilità a particolari azioni stimolanti, il luogo d'azione della causa patogena può naturalmente non coincidere col luogo di reazione allo stimolo.

Precedenza dell'alterazione del cambio sugli altri sintomi interni ed esterni della malattia. — Si potrebbe supporre che le ferite dei tagli di potatura costituissero l'origine dello stimolo di formazione dei cordoni in piante già colpite da arricciamento, mentre nelle viti sane questo fatto non si verificherebbe. Le ricerche che ho fatte intorno a una simile questione mi hanno permesso di accertare: 1° che nelle viti allevate a spagliera e quindi con potatura lunga, senza gravi ferite nè gommosi del legno, presentano egualmente un'attiva formazione di cordoni non appena sieno affette da arricciamento; 2° che nelle viti che incominciano ad ammalarsi dopo 8 anni e più di ottima vegetazione e che mostrano solo un principio d'indebolimento di vegetazione o soltanto un ritardo nello sviluppo delle gemme, già i cordoni sono al 2° anno di formazione, quindi essi hanno origine prima di qualsiasi altra alterazione che renda manifesto uno stato di malattia o di degenerazione del tessuto legnoso, giacchè la gommosi e la tillosi che si osservano nelle viti colpite da arricciamento da qualche tempo non si notano

nelle piante che si trovano all'inizio della malattia. Anche il ritardo e la diminuzione dell'attività rizogena accertati nelle viti ammalate, si riferiscono o a talee o barbatelle provenienti da piante già colpite da arricciamento, nelle quali dunque si tratta di una conseguenza dell'alterazione del cambio, ereditata dalla pianta madre, o a viti che, ammalatesi in posto, sono state esaminate dopo due o tre anni da che la prima alterazione del cambio erasi iniziata, giacchè, sino ad ora, il primo sintomo apprezzabile della malattia era desunto dalla dentellatura più pronunziata delle foglie, dall'emissione di femminelle, o dall'accorciamento degl'internodi, caratteri che si manifestano sempre molto in ritardo in confronto alla comparsa dei cordoni endocellulari. In relazione a quanto ho trovato sta il fatto che di tutta la pianta affetta da arricciamento gli ultimi organi a degenerare sono appunto le radici, quando particolari condizioni del terreno non favoriscono processi di marciume parassitario. Con questo non si può escludere che la causa della malattia possa risiedere nel terreno ed agire indirettamente sul ceppo pel tramite delle radici; ulteriori ricerche intorno all'eziologia della malattia potranno stabilire sino a qual punto le condizioni del suolo possono favorire o promuovere quest'ultima ⁽¹⁾.

Io mi limito ora a riassumere quanto risulta dalle mie osservazioni dirette sulle viti ammalate: *che, cioè, la prima alterazione visibile ha luogo nel cambio della sommità del ceppo e consiste in un anormale processo di secrezione che dà origine a cordoni endocellulari. Questa degenerazione si manifesta in modo lento e progressivo e solo per poco tempo può ritenersi localizzata. Essa, sino ad un certo limite, non è accompagnata, sul principio della malattia, da una diminuzione dell'attività del cambio o da una deviazione delle proprietà morfogene dei meristemi apicali. In questa degenerazione, che si conserva in tutto il corso della malattia e che è trasmissibile per innesto e che è costante in tutte le varietà di vitigni americani o nostrali più comunemente coltivate, a differenza delle oscillanti deformazioni esterne che sono in rapporto a proprietà anche individuali delle piante attaccate, io vedo il sintomo più saliente dell'arricciamento. Il rachitismo stesso non ne rappresenta che uno stadio secondario.*

(¹) Cfr. Ravaz in Progr. agr. et vitic. 1909, e Pantanelli in questi Rendiconti, XIX, 1910, pag. 395.

Embriologia. — *Di alcune particolarità embriologiche in Poinsettia pulcherrima* R. Gr. Nota della sig.^{ua} G. DONATI, presentata dal Socio R. PIROTTA.

Gli studi recenti del Modilewsky ⁽¹⁾ e del Dessiatoff ⁽²⁾, hanno messo in rilievo strutture molto interessanti del sacco embrionale di alcune specie del genere *Euphorbia*. Il Modilewsky ha constatato in *Euphorbia procera* Bieb. la presenza di un archesporio risultante di parecchie cellule, ciascuna delle quali si divide in due cellule figlie, di cui la superiore contribuisce, mediante ripetute divisioni, alla formazione della callotta, e l'inferiore diventa cellula madre delle macrospore. Così che in definitiva si hanno parecchie cellule madri delle macrospore. In ciascuna cellula madre, il nucleo, dividendosi due volte successivamente, dà origine a quattro nuclei figli; contemporaneamente però non avviene divisione cellulare, in maniera che le quattro macrospore non sono divise fra loro da membrana, ma sono rappresentate semplicemente dai quattro nuclei immersi in una massa citoplasmatica comune.

Di queste cellule madri quadrinucleate, una prende il sopravvento sulle altre, le schiaccia e si sviluppa in un sacco embrionale *sui generis*, in quanto che la sua membrana è quella della cellula madre delle macrospore ed i suoi quattro nuclei primitivi corrispondono a quelli delle quattro macrospore. Questi, coll'ingrandirsi del sacco, si dispongono a croce, e ciascuno di essi subisce due divisioni successive, formandosi così un sacco embrionale con sedici nuclei disposti in quattro tetradi. Da ciascuna tetrade migra, verso il centro del sacco embrionale, un nucleo, sicchè si formano quattro triadi e nel mezzo una tetrade di quattro nuclei. La triade micropilare assume il tipico aspetto di apparato oosferico, risultando essa di due sinergidi e dell'oosfera. Anche le altre triadi acquistano presso a poco un aspetto simile. Qualche cosa di analogo il Modilewsky ha osservato in *E. palustris* ⁽³⁾.

In numerose altre specie esaminate egli ha trovato uno sviluppo normale per il sacco embrionale. È però del parere che fra lo sviluppo nor-

⁽¹⁾ Modilewsky J., *Zur Embryobildung von Euphorbia procera*. Berichte der Deutsch. Bot. Gesellsch., Bd. XXVII, Heft 1, 1909; Id., *Weitere Beiträge zur Embryobildung einiger Euphorbiaceen*. Berichte der Deutsch. Bot. Gesellsch., Bd. XXVII, Heft 8°, 1910.

⁽²⁾ Dessiatoff N., *Zur Entwicklung der Embryosackes von Euphorbia virgata* W. R. Berichte der Deutsch. Bot. Gesellsch., Bd. XXIX, Heft 2°, 1911.

⁽³⁾ Modilewsky J., *Ueber die anomale Embryosackentwicklung bei E. palustris L. und anderen Euphorbiaceen*. Berichte der Deutsch. Bot. Gesellsch., Bd. XXIX, Heft 7°, 1911.

male della grande maggioranza della specie e quello anomalo di *E. procera* ed *E. palustris*, vi possano essere gradi di passaggio. Infatti in *E. lucida* egli ha trovato, in comune con *E. palustris* ed *E. procera*, la presenza di un archesporio pluricellulare non solo, ma, oltre a sacchi embrionali con otto cellule, degli altri, il numero e la posizione delle cui cellule deviava alquanto dal caso normale.

Il Dessiatoff ⁽¹⁾, in *E. virgata* W. R. ha osservato, a differenza di *E. procera* ed *E. palustris*, che le cellule madri si dividono regolarmente in quattro macrospore, delle quali una si sviluppa in sacco embrionale. Il nucleo primario di questo, mediante due successive divisioni, si divide in quattro nuclei che si dispongono a croce. Ciascuno di essi, mediante doppia divisione, ne forma quattro, e così anche in *E. virgata* W. R. si avrebbe un sacco embrionale con sedici nuclei, disposti in quattro tetradì, da ognuna delle quali migra verso il centro un nucleo. Il Modilewsky però ha messo in dubbio le ricerche del Dessiatoff per il fatto che *E. virgata*, al suo esame, è risultata normale. Se non che, molto probabilmente, gli autori, come lo stesso Modilewsky dice, si sono trovati di fronte a due specie diverse, avendo il Dessiatoff studiato l'*E. virgata* W. R., e il Modilewsky l'*E. virgata* W. K.

Per consiglio del prof. Pirotta, mi sono accinta allo studio embriologico di parecchie *Euforbiacee*, in parte spontanee e in parte coltivate nel R. Orto Botanico. In tutte le specie spontanee appartenenti al genere *Euphorbia* da me studiate, ho trovato uno sviluppo normale del sacco. Fra le specie coltivate ho esaminato *Poinsettia pulcherrima* R. Grah., genere molto affine ad *Euphorbia*, anzi da alcuni ritenuto come una semplice sezione del gen. *Euphorbia* medesimo. La *Poinsettia pulcherrima* presenta due sorta di infiorescenze: le une sono di dimensioni un po' più grandi delle altre. Dalla sommità delle prime, per rapido allungamento del peduncolo che porta il fiore carpellifero, esce all'esterno un ovario che va aumentando di grossezza in un tempo relativamente breve; nelle seconde, sull'asse mediano, nell'interno del ciato, esiste un corto peduncolo sormontato da un piccolo ovario, che si sviluppa molto lentamente. Il mio studio si riferisce appunto a questa seconda sorta di fiori carpelliferi. Al mio esame sommario è risultato che la costituzione del gametofito nel sacco embrionale a completo sviluppo, è normale nella grandissima maggioranza dei casi. Nella fig. 1 dell'annessa tavola ho riprodotto uno di tali sacchi embrionali normali: vi si osserva, nell'estremità micropilare, una delle sinergidi e l'oosfera; nell'estremità opposta tre antipodi abbastanza bene manifeste, benchè non sia troppo evidente la membrana attorno a ciascuna di esse. Verso il centro si notano i due nuclei polari ancora molto distanziati tra loro. Non ho mai osservato,

(1) Dessiatoff N., *Zur Entwicklung des Embryosackes von Euphorbia virgata* W. R. Berichte der Deutsch. Bot. Gesellschaft, Bd. XXIX, Heft 2, 1911.

anche quando vengono perfettamente a contatto, la fusione di essi, rimanendo invece sempre distinti. Uno dei parecchi sacchi embrionali esaminati mi si è mostrato con una struttura che devia dal caso normale. Ho trovato, cioè, un sacco di dimensioni più grandi e con sedici cellule distribuite in maniera abbastanza irregolare. Le figg. 2-5 della tavola annessa rappresentano le sezioni successive ottenute in esso. Nella fig. 2 si osservano verso l'alto due cellule che, per i loro caratteri, manifestamente evidenti, possiamo interpretare come due sinergidi. In ciascuna di esse infatti notiamo un nucleo, e al di sotto un grande vacuolo. Al di sotto delle due sinergidi, e verso le pareti laterali del sacco embrionale, si scorgono due altri nuclei; in fondo al sacco poi si vedono altre cinque cellule distinte fra loro perchè ciascuna possiede un proprio nucleo, ma mal delimitate nella loro massa citoplasmatica. Nella parte superiore della fig. 3 si osserva un nucleo, circondato da una massa mal delimitata di citoplasma, nucleo che interpreto come oosfera; nel centro due altri nuclei strettamente avvicinati; poi un quarto nucleo ancora un po' più in basso, ed un quinto in fondo al sacco. Nelle figg. 4 e 5 si distinguono altri due nuclei. In complesso, dunque, sedici cellule. Quale sia l'origine di tale anomalia non posso ancora precisare, perchè devo ancora completare lo studio dello sviluppo. Ad ogni modo, mi è parso utile rendere note queste mie osservazioni, perchè esse dimostrano nuovamente come lo sviluppo del gametofito femminile delle *Euphorbiacee* sia soggetto a variare da una specie all'altra, e di più, nel caso mio, anche nella medesima specie, essendosi presentato alcune volte normale ed altra no.

Patologia vegetale. — *Batteriosi dell'Aster chinensis L.: Bacillus Asteracearum n. sp.* Nota del dott. G. L. PAVARINO, presentata dal Socio G. BRIOSI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente BLASERNA legge la seguente commemorazione del Socio prof. ANTONIO PACINOTTI:

Con vero e profondo dolore comunico all'Accademia la triste notizia della morte avvenuta nella persona dell'illustre nostro Socio ANTONIO PACINOTTI. Quantunque da vari anni lo si sapesse affetto da una di quelle malattie che non perdonano, pure la sua morte improvvisa recò una dolorosa sorpresa; perchè tutti ignoravano che l'illustre infermo fosse così vicino alla sua fine. Ma la grande sua invenzione rimarrà sempre viva nella scienza, come quella che conteneva in sè il germe fecondo di tutti i più grandi progressi dell'Elettrotecnica.

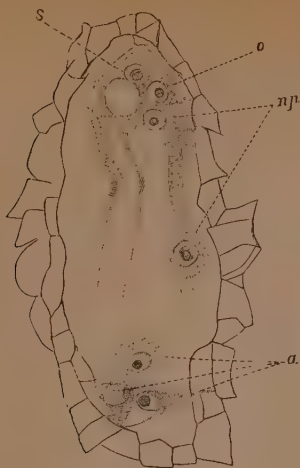


FIG. 1.

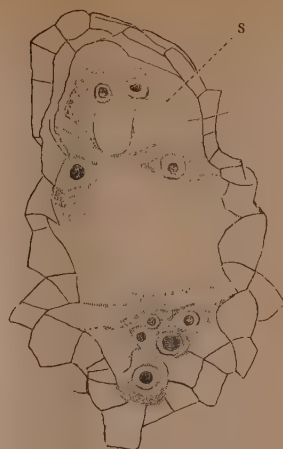


FIG. 2.

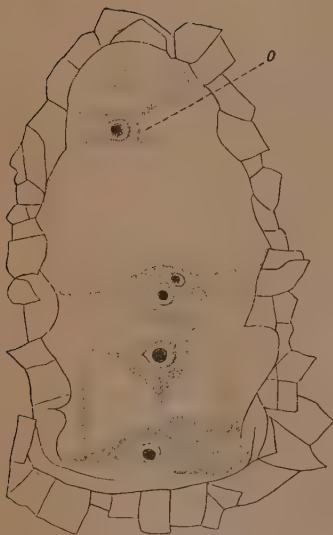


FIG. 3.



FIG. 4.

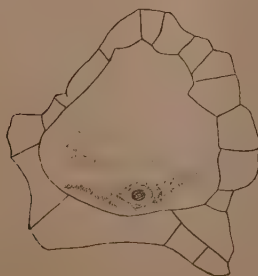


FIG. 5.

Antonio Pacinotti nacque a Pisa il 17 giugno 1841. Studiò in quella Università; fu allievo dell'illustre prof. Felici e prese la laurea. Nel 1861 venne nominato, all'Osservatorio astronomico di Firenze, assistente del professore Donati, divenuto celebre per la scoperta della cometa che apparve nel 1859, prese dimensioni straordinarie ed attirò su di sè l'attenzione del mondo. Da Firenze egli passò all'Istituto tecnico di Bologna e fu poi nominato nel 1873 professore di fisica all'Università di Cagliari, dove rimase fino al 1882, anno in cui passò definitivamente a Pisa.

Nel 1864 egli pubblicò nel *Nuovo Cimento* la descrizione di una nuova macchina elettromagnetica, destinata ad essere sostituita, nei corsi di fisica, alla macchina Clarke allora esistente e ad altre consimili. La macchina ideata dal giovane scienziato aveva la forma di un anello, e portava una veramente ingegnosa disposizione di fili, per cui forniva una corrente continua.

Tale descrizione non richiamò, per il momento, l'attenzione dei fisici. L'invenzione di un apparecchio per dimostrazioni di scuola si presentava con un valore molto subordinato. Non deve quindi sorprendere se l'invenzione del Pacinotti rimase nel dimenticatoio, di fronte ai grandi problemi che allora agitavano la scienza.

La grande, meravigliosa scoperta della corrente elettrica, fatta da Alessandro Volta, aveva destato la più profonda impressione. In tutti i laboratori si ripetevano le sue esperienze, s'indagavano le proprietà sorprendenti della corrente stessa, e se ne scoprivano delle nuove. Sarebbe impossibile, senza eccedere a dismisura i limiti tracciati a questa commemorazione, di voler fare la storia delle scoperte che, in fatto di elettricità, illustrarono il secolo precedente.

Ma da tutto questo enorme cumulo di fatti estraggo un gruppo, che presenta qui un interesse speciale, come quello che serve a fissare il posto all'anello di Pacinotti, anello che non era soltanto un apparecchio di scuola, come il suo autore al principio supposeva, ma racchiudeva in sè il concetto delle più importanti scoperte che vennero poi.

Nel 1876 io mi trovavo a Londra, come Delegato del Governo Italiano all'Esposizione internazionale di istrumenti scientifici — International Loan Collection — curata dalla Direzione del South Kensington Museum. Fra le molte cose ivi esposte figurava la *candela* dell'ufficiale russo Jablochkoff, che sorprese tutti. Noi tutti, Delegati dei diversi Governi stranieri, esclamammo: « Ma questa è una riproduzione dell'uovo di Colombo! ». Quando si pensi che abili costruttori, fra i quali Soleil, si erano sforzati di costruire dei regolatori, per mantenere automaticamente i due carboni dell'arco voltaico l'uno sopra l'altro e possibilmente alla stessa distanza, l'idea di Jablochkoff per la grande sua semplicità giustificava il generale entusiasmo. Si disse, che il problema dell'applicazione della lampada ad arco era oramai risoluto, e s'incominciarono gli studi per tale applicazione in grande.

La candela di Iablochkoff diede dunque una enorme spinta a questi studi: se non che la spinta fu tanta, che essa stessa vi lasciò la vita.

Si vide presto che la candela, tanto semplice in apparenza, presentava all'atto pratico difficoltà insormontabili. Ma ciò che interessa noi in questo momento, è che era alimentata da una nuova macchina magneto-elettrica, la quale portava il nome di *Gramme*.

Esaminata meglio, la macchiua di Gramme apparisce come la fedele riproduzione dell'anello di Pacinotti, nelle sue parti più sostanziali e perfino nei suoi difetti. Sorse allora, e con ragione, una discussione vivace sui diritti del Pacinotti. La priorità dell'invenzione dell'anello non potrebbe in alcun modo essergli contestata.

Come si disse, nel 1864, Antonio Pacinotti pubblicava, nel *Nuovo Cimento*, la descrizione di una nuova macchina magneto-elettrica, destinata a dimostrazioni di scuola. Tale descrizione è un piccolo capolavoro di ordine e di chiarezza. Leggendola, si ha l'impressione di uno scritto fatto da un giovane d'ingegno, educato a buona e severa scuola. L'autore descrive con grande chiarezza il suo anello, ne determina con esattezza il rendimento e si persuade che esso è molto superiore ai modelli allora esistenti. Sarebbe difficile immaginare una esposizione più chiara, più esatta e più feconda. Il Pacinotti s'accorge che il suo anello presenta il carattere della reversibilità; cioè a dire che, facendolo girare col braccio o con altro motore qualunque, esso vi fornisce una corrente continua; all'incontro esso gira, se gli si applica una corrente. L'anello può quindi essere, a volontà, o la sede di una forza elettromotrice, prodotta da una forza meccanica, oppure la sede di una forza meccanica ottenuta col mezzo di una corrente.

Un apparecchio simile non esisteva, ed il Pacinotti ne è l'incontestabile ed incontestato autore. Ma la macchina del Gramme è venuta dieci o dodici anni più tardi, nel 1876. Essa mostra una strana rassomiglianza con quella del Pacinotti. Doveva quindi sorgere, ed è sorta difatti, la domanda se questa del Gramme non dovesse considerarsi come una copia più o meno abile dell'anello pacinottiano. Nel 1865, dovendo il Pacinotti recarsi in Inghilterra, si fermò a Parigi e si recò nell'officina di Froment gestita dal successore Dumoulin. Froment aveva immaginato un motorino elettrico, che si trova in tutti i Gabinetti di fisica. Il desiderio del Pacinotti era semplicemente di farsi costruire il suo anello, avendo egli trovato delle difficoltà di averlo bene costruito in Italia. Il Dumoulin, personalmente, non se ne interessò, ma chiamò un suo operaio intelligente, al quale Pacinotti spiegò il suo apparecchio. Si crede che l'operaio fosse il Gramme. Certo è che il Gramme è stato per vari anni operaio nell'officina di Froment; ma non si è potuto mai sapere, se esso lo fosse nel 1865, e se fosse stato realmente colui che aveva conferito col Pacinotti. I Francesi si sono ben guardati dal fornire queste piccole informazioni!

L'affare col Pacinotti andò in fumo e nel 1876 si presentò alla International Loan Collection di Londra il Gramme col suo apparecchio patentato al proprio nome. Il Pacinotti reclamò all'Accademia delle scienze di Parigi, la quale annise il suo reclamo nei Rendiconti, ma senza prender parte alla controversia; il che è conforme all'indole di tutte le Accademie, le quali, quando siano ben dirette, offrono la loro ospitalità ai reclami seri, ma non amano pronunziarsi.

I diritti scientifici del Pacinotti furono sostenuti a Parigi nel 1882 dal compianto Gilberto Govi, e più tardi da Silvanus Thompson in Inghilterra e specialmente da Werner Siemens di Berlino, l'autore incontestato della prima macchina dinamo-elettrica ad auto-eccitazione. Il merito vero dell'anello di Pacinotti consiste in ciò, che contiene in sè la soluzione di tutti i problemi elettro-meccanici; cosicchè la sua applicazione è divenuta possibile anche nella tecnica delle correnti alternanti e polifasiche, malgrado sia stato concepito per creare ed utilizzare correnti continue. Tutto ciò non era, nè poteva essere, nella monte del Pacinotti, ma resta pur sempre un fatto importante, che l'anello servì di guida a tutti gli ulteriori progressi, anche i meno prevedibili.

È stata questa la sorte di Pacinotti, come più tardi quella di Galileo Ferraris col suo *Campo rotante*. Essi hanno lavorato per l'umanità, senza trarre profitto dagli immortali loro lavori. Ed è perciò che essi hanno diritto alla maggiore nostra gratitudine ed ammirazione. E la nostra riconoscenza non è loro mancata.

Quanto al Pacinotti, egli fu eletto Corrispondente della R. Accademia dei Lincei fin dal 1883 e Socio nazionale nel 1898; nel 1888 egli divenne uno della Società dei XL e cavaliere dell'Ordine civile di Savoia. Nel 1905 fu nominato Senatore del Regno e nell'anno decorso il Re gli conferiva, *motu proprio*, il Gran Cordone dell'Ordine dei SS. Maurizio e Lazzaro. Sono queste le più alte espressioni di stima e di riconoscenza nazionale, tanto scientifica che politica e sociale.

Il Corrispondente GAUDENZIO FANTOLI legge la seguente Commemorazione del Socio straniero MAURIZIO LÉVY.

Da oltre un anno venni onorato dell'incarico di ricordare Maurizio Lévy in questa Accademia dei Lincei che lo ebbe Socio straniero dal 1888. Contingenze diverse e circostanze non dipendenti dalla mia volontà mi hanno però conteso di attendere prima al gradito e mesto dovere che mi fu commesso.

Chiedo di ciò benevolente venia, assolvendo come posso il compito mio colla trepidazione ben naturale in chi deve dire in questa sede, pur nei limiti convenienti ad una commemorazione, di una figura veramente luminosa e poliedrica di scienziato e di ingegnere.

A tale compito riescono poi anche affatto inadeguate le tenui facoltà di cui dispongo, animate solo dalla riverenza per l'ingegno e dal desiderio fervoroso d'intenderlo e di amarlo.

Di Maurizio Lévy — membro dell'Istituto di Francia, già vice-presidente, indi presidente della Accademia delle Scienze, professore al Collegio di Francia, alla Scuola Politecnica, alla Scuola Centrale, ispettore generale superiore nel Corpo degli ingegneri dei ponti e strade, insignito di alte dignità sociali e scientifiche — dissero in patria gli eminenti colleghi suoi, Emilio Picard, Levasseur, Hadamard: altre notizie diedero gli onorevoli sigg. prof. Noel, ing. de Préaudeau, ing. A. Dumas ⁽¹⁾.

Tali omaggi di pensiero, che accompagnarono i funebri dell'estinto o li seguirono poco di poi, sono cenni commemorativi i quali si attengono in ispeciale ad una rapida delineazione dell'opera del Lévy nella scienza pura; non si ha per vero fin qui, a quanto io sappia, un lavoro che rilevi sufficientemente anche l'altra parte dell'opera stessa: la contribuzione così vasta e geniale nel dominio delle scienze applicate.

Il desiderato degno lavoro bibliografico gli verrà certo dal paese suo ch'egli ha onorato con diffusa nominanza, perchè senza dubbio Maurizio Lévy è stato in questi anni l'ingegnere francese più noto e celebre oltre i confini della sua patria per un complesso di studi o di applicazioni utili nei problemi dell'elasticità, della statica, della resistenza dei materiali, dell'equilibrio delle terre, dell'elettricità e della trasmissione dell'energia, dell'idraulica, della navigazione, delle grandi costruzioni idrauliche e civili ecc.; noto altresì per le profonde speculazioni teoriche nella geometria pura e nell'analisi, nella cinematica, nelle teorie matematiche dell'ottica, dell'elasticità, del calore, nella meccanica analitica e nella meccanica celeste.

Ingegnere di razza, spirito inventivo che considerava la meccanica come il termometro di tutte le scienze e, col pensiero di Leonardo, il moto come causa d'ogni vita, egli discende da quella famiglia della École Polytechnique e delle storiche Scuole di Applicazione cui appartengono i grandi nomi di Navier, Cauchy, Poncelet, Poisson, Lamé, de Saint-Venant, Bélanger, Bresse ecc., i quali, innovando o rinnovando, ebbero ed hanno la riconoscenza del mondo.

Ed ancora per la prodigiosa versatilità accoppiata alla penetrazione, il Lévy è invero lo scienziato di molte arti: la genialità mediterranea della sua mente fa ricorrere il pensiero anche a quegli uomini del nostro Rinascimento che il francese pur conosceva ed amava così da ritenerli i primi

⁽¹⁾ Queste, con altre notizie biografiche, note ecc., mi vennero favorite dalla nobile cortesia della onorevole famiglia Lévy, cui rinnovo l'espressione della mia gratitudine rispettosa.

degni per lo spirito libero, l'ingegno ed il coraggio, di assistere ai conati primordiali della scienza applicata.

Egli non teme dunque il ritardo di quella compiuta analisi bibliografica che gli verrà dal tempo; e come i forti davvero, uscirà più forte da quel periodo critico che segue la morte di ogni valent'uomo, l'*enterrement spirituel* di Flaubert.

Nato a Ribeauvillé (Alsazia) nel 1838, ingegnere allievo nel 1858, ripetitore alla Scuola Politecnica nel 1861, dottore in scienze nel 1867 con due tesi che lo rivelano già maestro, supplente di Bertrand nel 1874 al Collegio di Francia nella cattedra di fisica generale e matematica, dell'Accademia delle Scienze nel 1883, titolare nel 1885 di meccanica analitica e di meccanica celeste, Maurizio Lévy lascia una produzione scientifica e tecnica iniziata nel 1861 ed ininterrotta per cinquant'anni, esposta principalmente nei *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, nel *Récueil des savants étrangers*, nel *Journal des mathématiques pures et appliquées*, negli *Annales des ponts et chaussées*, in estratti ed opere diverse di cui parecchie di vasto disegno come la Statica grafica, la Teoria delle maree, lo studio sulla Trazione meccanica dei natanti, il Corso di cinematica e meccanica.

Il breve esame che segue è dedotto direttamente dall'anzidetta materia bibliografica principale.

All'argomento della *Geometria* e dell'*Analisi* appartengono: i lavori intorno alle coordinate curvilinee ortogonali di cui lo stesso Chasles rilevava la parte interamente originale, segnalati con alta lode da Cayley e Weingarten (1867-1870) ⁽¹⁾; — i lavori intorno alle superficie suscettibili di far parte di un sistema ortogonale, alle superficie e loro focali, e intorno alle linee geodesiche (1872-1877) ⁽²⁾; — le ricerche attinenti alle forme quadratiche di più differenziali ed alle equazioni a derivate parziali di second'ordine a due variabili indipendenti (1872-1877) ⁽³⁾.

Alla *Cinematica pura* si riferiscono sei Note sulla cinematica negli spazi inserite nei *Comptes Rendus* tra gli anni 1878 e 1880, nelle quali Lévy riprende in germe alcune idee di Bertrand, di Beltrami e dello Schläfli che ricongiungono direttamente i primi fondamenti della Geometria alla Cinematica ed alla Dinamica, e perviene fra l'altro alle proprietà delle superficie spirali rimaste classiche — indica l'Hadarnard — nell'opera di Gastone Darboux sulla Teoria delle superficie.

(¹) Tesi per il dottorato in scienze, 1867; *Journal de l'École Polytechnique*, 1870.

(²) *Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences* (1872 e 1873). Cinque comunicazioni del novembre e dicembre 1877.

(³) *Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences* (1872 e 1877).

I problemi della *Fisica Matematica* nel suo più vasto dominio furono esplorati dal Nostro con interesse costante, soprattutto quelli attinenti alla *teoria matematica dell'elasticità*.

La prima Memoria sulle equazioni generali dei movimenti interni dei solidi oltre i limiti dell'elasticità, ha l'onore della inserzione nel *Récueil des savants étrangers* ⁽¹⁾. Una Nota sullo stesso argomento richiama ancora l'attenzione del de Saint-Venant ⁽²⁾.

Seguono: — una Memoria che dirige la teoria matematica dell'elasticità alla ricerca delle tensioni nelle travi articolate e sui sistemi di massima resistenza, storica ricerca del 1873 dov'è applicato il principio delle velocità virtuali, riportata poi anche nella prima edizione della *Statica grafica*; — un'altra sulle equazioni generali dell'elasticità in coordinate curvilinee (1875); — un'altra sulla teoria delle lamine elastiche piane, lavoro propriamente capitale e di lunga lena dove è rilevato l'accordo delle teorie di Poisson e di Kirchhoff, con applicazioni allo studio completo dell'equilibrio e del movimento della lamina libera, appoggiata, od incastrata ⁽³⁾.

Una questione pratica propositagli direttamente dai costruttori e fino allora risolta empiricamente, adduce il Lévy alle ricerche sulle deformazioni di una verga retta o curva, sollecitata, oltre che dalle coppie estreme, da pressioni normali alla fibra mediana ⁽⁴⁾.

Altre Note importanti sulle proprietà generali dei corpi solidi elastici e sull'equilibrio elastico delle lamine trovansi nei *Comptes Rendus* del 1888 e del 1899.

Alle *teorie matematiche dell'ottica*, che il Lévy aveva già tratte dallo studio di Cauchy e trasfuse con applicazioni originali in un suo lavoro d'idrodinamica del 1867, appartiene una ricerca sulle equazioni generali della doppia rifrazione compatibili colla superficie dell'onda di Fresnel; Memoria di lunga lena inserita nel *Journal des Mathématiques*, 1888.

La *teoria analitica e meccanica del calore* ebbe pure dal Nostro una serie di Note ragguardevoli ⁽⁵⁾.

L'insegnamento di *Meccanica analitica e Meccanica celeste* al Collegio di Francia mosse il Lévy, nota Giacomo Hadamard che gli successe nell'alta cattedra, all'acquisto della mentalità astronomica ⁽⁶⁾.

⁽¹⁾ Memoria presentata all'Accademia delle Scienze il 20 giugno 1870. Vedasi pure il *Journal des Math.*, 1871.

⁽²⁾ *Comptes Rendus*, 1871.

⁽³⁾ *Journal des Math. pur. et appl.*, 1877; dove occupa poco meno di un centinaio di pagine.

⁽⁴⁾ *Mémoire sur un nouveau cas intégrable du problème de l'élastique etc.*, in *Journal des Math.* 1884.

⁽⁵⁾ *Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences*, annate 1876 e 1877.

⁽⁶⁾ *Revue générale des sciences*, 28 febbraio 1911. Nécrologie de M. Lévy.

In quest'ordine di pensieri sono notevoli le Comunicazioni sulla teoria della figura della terra, sulle applicazioni delle leggi elettrodinamiche al moto dei pianeti ⁽¹⁾, e sopra tutto l'opera sulla Teoria delle maree ⁽²⁾, di valore storico ed intrinseco, specie nei capitoli sulle maree negli stretti e nei fiumi, sull'onda solitaria ecc., lucida esposizione sistematica che degnamente precede il lavoro più recente, d'uguale argomento, di Enrico Poincaré.

Anche in questi lavori di scienza pura si palesano le innate attitudini pratiche del Lévy, poichè ora è la realtà che lo stimola a ricerche teoriche, ora è la ricerca teorica che gli fa tosto discernere l'applicazione tecnica ed industriale.

L'opera di *Scienza applicata* svolta da Maurizio Lévy, risulta pertanto intimamente connessa alla precedente, ed è altrettanto varia e geniale.

L'*Idraulica* ebbe contributi di alto valore storico e pratico; anche qui, giovanissimo, Lévy si afferma maestro compiuto.

È del 1866 il lavoro sulla teoria d'una corrente liquida applicata ai tubi di condotta, distinto colla medaglia d'oro degli Annali di ponti e strade ⁽³⁾. È del pari del 1866 il saggio teorico applicativo sul moto dei liquidi, presentato come tesi per il dottorato in scienze ⁽⁴⁾, ed è di qualche anno posteriore la Memoria sull'idrodinamica dei liquidi omogenei, particolarmente sul loro deflusso rettilineo e permanente, onorata colla inserzione nella Raccolta dei Savants étrangers (1869).

In questi lavori Lévy ha inteso a cercare l'espressione più generale dell'attrito interno, facendo intervenire nella espressione del relativo coefficiente anche la velocità assoluta, secondo un pensiero attinto al Bazin ed a questi suggerito dalle classiche esperienze, riuscendo poi a risultati accordantisi perfettamente da una parte cogli esperimenti di Bazin sui canali scoperti, dall'altra con quelli di Darcy sui tubi di condotta.

Appunto la formola d'origine teorica dell'A. sui tubi ha ancor oggi il suo pregio storico ed una larga notorietà applicativa tra gli ingegneri ⁽⁵⁾.

Lévy, che in uno dei citati lavori chiama la via sperimentale la sola progressiva, non annetteva esagerata significazione al fatto della concordanza dei risultati colle deduzioni di ingegnosi tentativi di interpretazione analitica *a posteriori* intorno alle correnti naturali. Al suo spirito chiaro non è sfuggito certo il punto filosofico della questione sul valore contingente delle

⁽¹⁾ Comptes Rendus, 1888 e 1890.

⁽²⁾ Gauthier-Villars, 1898. La prima parte è la sola edita.

⁽³⁾ Pubbl. nel 1867 negli Annales des ponts et chaussées.

⁽⁴⁾ Thèses présentées à la Faculté des sciences de Paris... Gauthier-Villars, 1867.

⁽⁵⁾ E non solo tra questi. Vedasi un notevole lavoro del Menneret, professore a Grénoble, che richiamò l'attenzione del Boussinesq (Thèses de la Faculté des Sciences de Paris, 1911, e Journal de Physique, sett.-ott. 1911).

ipotesi introdotte; e forse ha pensato anche dopo lavori d'altissimo pregio ad altri dovuti, che l'*énigme désespérante* del de Saint-Venant attende ulteriori fasci di luce.

Non tutti sono infatti d'accordo nel ritenere in massima sicuro il possesso della chiave genuina della verità circa la contestura intima delle acque scorrenti in fiumi e condotti: parecchi possono dubitare che si è tuttora nel periodo degli svariati pur altamente encomiabili artifizi di grimaldello, per tentare la porta stessa del vero.

I problemi meccanici attinenti alla *navigazione interna* furono oggetto di lunghe meditazioni del Nostro. Il suo noto sistema di trazione dei natanti per fune telodinamica, che ha applicazioni nella Francia e nel Belgio, venne concepito e fissato in pochi mesi del 1887: indi, cimentato con studii e perfezionamenti continui, fu esposto in una pubblicazione ufficiale edita nel 1894, poderoso volume prezioso nel riguardo storico e pratico, contenente capitoli che sono compiute monografie di meccanica analitica applicata ai problemi della resistenza e della trazione ⁽¹⁾.

Il secondo volume doveva riguardare la trazione elettrica delle navi, cui pure Lévy dedicò molte ricerche, come si rileva da alcuni punti del primo volume e da accenni diversi dei *Comptes Rendus* ⁽²⁾, negli Atti dei Congressi internazionali di navigazione interna ecc.: per disavventura, tale opera è rimasta inedita e forse incompiuta.

Se il problema tecnico della trazione meccanica od elettrica è risoluto, la soluzione economica — la sola ragionevolmente adottabile — richiede però speciali condizioni del traffico: onde il Lévy stesso, in questi ultimi anni, riconosceva argutamente che la scienza doveva spesso abbassare lo stendardo davanti al modesto ronzino di rimorchio.

Di alto ed immediato pregio sono le ricerche dell'eminente francese nell'argomento delle *dighe pei grandi serbatoi*. Stimolate da un disastroso evento — la rottura della diga di Bouzey — sono esposte in Note divenute classiche, le quali concludono alla proposta di nuovi metodi di calcolo e di nuove cautele per tali opere ⁽³⁾: cautele e metodi, avvalorati pure da alcune importanti ricerche sperimentali più recenti, prescritti subito ufficialmente nella Francia e di crescente penetrazione applicativa anche altrove.

⁽¹⁾ Ministère des travaux publics. Imprimerie Nationale. 1894.

⁽²⁾ *Comptes Rendus*, 1888 e seg.

⁽³⁾ *Comptes Rendus de l'Acad. d. Sc.*:

5 agosto 1895. *Quelques considérations sur la construction des grands barrages.*

2 marzo 1898. *Sur la légitimité de la règle dite du trapèze.* ecc.

4 luglio 1898. *Sur l'équilibre élastique d'un barrage en maçonnerie.* ecc.

Annales des ponts et ch. 1897: *Notes sur les diverses manières d'appliquer la règle du trapèze...*

Una nuova sua condizione di calcolo, intesa a volere sul paramento a monte delle dighe non solo l'esclusione di ogni sforzo di tensione ma altresì una compressione non minore della pressione idrostatica locale, pare a noi già in germe, come preoccupazione non precisata, in una Memoria del nostro eminente Alberto Castigliano ⁽¹⁾; i meriti del quale, in ordine al principio del minimo lavoro, il Lévy fu tra i primi a far riconoscere all'estero.

Al dominio della *resistenza dei materiali e delle costruzioni edili*, appartengono: una prima Memoria del 1861, colla quale il giovanissimo ingegnere si afferma in un lavoro sulle travi continue, e dove l'ingegnosa applicazione del principio della sovrapposizione degli effetti delle forze elastiche è tosto rilevata con alta lode e messa ad ulteriore profitto dal Bresse. L'A. è tornato poi altre volte sul tema della resistenza delle travi ⁽²⁾.

Il volume sulla *Statica grafica e sue applicazioni* (1875), che ebbe influenza decisiva in Francia, è un capolavoro didattico di larghissima notorietà.

Negli anni 1886-88 l'opera venne rifatta in quattro volumi, folti di ricerche originali e di ricerche altrui, riassunte e vivificate da un'esposizione tersa. La nuova edizione, o meglio la rielaborazione critica ed aggiornata dell'opera, è rimasta interrotta per la morte dell'A., dopo il primo volume (1907).

La Nota VII di questo volume indica quale e quanto prezioso lavoro abbia dedicato il Nostro alle norme di calcolo e di sicurezza delle *costruzioni in cemento armato*. Il lucido elaborato della Commissione governativa, della quale egli fu presidente e relatore (1906), venne tosto trasfuso nelle prescrizioni ufficiali edili dello Stato francese.

La preoccupazione della precisione storica e dell'esatta attribuzione dei meriti di priorità è evidente in questa ed in altre opere espositive di Maurizio Lévy: indice sicuro di quella probità scientifica che nel commercio del pensiero è giustamente ritenuta ancor più necessaria della valentia.

Sull'*equilibrio delle terre* in riguardo alla *stabilità dei muri di sostegno* estese il Lévy fin dal 1867 una Memoria classica, che l'Accademia delle Scienze volle poi inserta nella raccolta dei *Savants étrangers* ⁽³⁾: recentemente ancora, Emilio Picard indicava il valore storico e germinale di quel lavoro giovanile ⁽⁴⁾.

Le richieste del Consiglio superiore dei ponti e strade, cui Lévy apparteneva, e quelle frequenti che i Ministri rivolgevano al suo alto sapere,

(1) Politecnico, 1884. La parte inferiore più importante delle dighe di grande altezza a serbatoio pieno è sollecitata nel profilo Castigliano a sforzi di compressione notevolissimi e crescenti sul paramento a monte, d'ordine consimile a quelli sul paramento a valle.

(2) Comptes Rendus de l'Acad. de Sc., 1875, 1886, 1895.

(3) La Memoria, ampliata, ebbe una seconda redazione nel Journal des Math. 1873.

(4) Discorso 3 dicembre 1910 alle onoranze funebri di M. Lévy.

diedero occasione a molti altri importanti studii personali dell'A. nel tema delle *costruzioni edili*, consacrati in parte nei volumi della Statica; mi limito alla citazione degli studii sul ponte Alessandro III e sulla passerella Alma-Jena.

I suggestivi problemi dell'*elettricità* dovevano presto attrarre la meditazione del Nostro.

La sua nota collaborazione fattiva col Mascart cominciò nel 1881, quando i due si trovarono insieme delegati al primo Congresso internazionale di elettricità: l'unione diventò più intima nella Commissione di studio del sistema di misure elettriche.

È poi del Lévy il memorabile rapporto della Commissione presieduta da Giuseppe Bertrand sulle esperienze di Marcel Deprez per il trasporto elettrico di forza da Creil a Parigi ⁽¹⁾.

Lunghi studii, si è detto, furono dedicati alla trazione elettrica dei natanti.

L'ansioso interesse per tutte le questioni dell'elettricità non abbandonò mai il Lévy, ed è proprio degli ultimi suoi anni un discorso elevato di pensiero e di sintesi pronunciato come presidente del primo Congresso internazionale delle applicazioni elettriche tenuto a Marsiglia nel 1908.

Questo, che ho rapidamente ed incompiutamente delineato, è dunque un forte lavoro esteso nei campi più disparati, dove una mente agile e potente seppe incidere impronte personali di maestro e di signore. Ciò è ancora più notevole ai di nostri, mentre il settore intellettuale di dominio individuale pare tenda a restringersi intorno ad una particolare forse troppo esclusiva direzione.

Maurizio Lévy entra quindi a far degna parte della eletta famiglia di scienziati tecnici che già ricordai, eletta anche per quell'*esprit de finesse* di cui parla Pascal lor nobile antenato, e si aggiunge al grande patrimonio scientifico della Francia, dove è sempre palese e fruttifera la tradizione e dove per lunga teoria di menti affini ben si vede *come il maestro fa il discente*.

Altro carattere etnico di spiccata evidenza nel Lévy è la limpidezza cristallina del metodo e della forma. L'elaborazione artistica della materia scientifica, secondo l'espressione di Eugenio Beltrami, ricordata da Vito Volterra, è perfetta anche nel Nostro. Egli va nel modo più compendioso, per la via rettilinea, verso il reale, ed i suoi lavori didattici sulla statica, sulla cinematica e meccanica, sulla teoria delle maree, o quelle lezioni e sintesi pubblicate in estratto che potemmo conoscere, ci fanno intendere appieno il valore dell'attributo « *le lumineux* », che ebbe dai suoi allievi del Collegio di Francia.

(1) Annales des ponts et chaussées. 1886.

Maurizio Lévy amò pure con simpatia costante l'Italia nostra; l'ingegno scientifico italiano ebbe in lui un assertore ed un estimatore riverente. Le sue opere lo attestano, ed abbiamo al riguardo grati ricordi anche dall'unica contingenza che la ventura ci ha offerto di conoscere il Lévy quando, nel 1905, l'insigne uomo — bella e maschia figura in verde vecchiezza — compì un viaggio nella Penisola per il decimo Congresso internazionale di navigazione interna.

Il ricordo di quei giorni vibrava ancora in una lettera che conserviamo cara, coll' accenno nostalgico e cortese al Paese italico *sì charmant et charmeur*.

Spirito sempre giovane, il Lévy, in una allocuzione pronunziata nel 1900 come presidente della Accademia delle Scienze, paragonava il mondo dei suoi primi anni a quello della sua sera, e dichiarava di gioire come d'una doppia esistenza terrestre, parendogli, per molti riguardi, le due epoche separate non da decenni, bensì da secoli o decine di secoli, quasi che la polvere luminosa del pensiero umano disseminata nel passato sia venuta a raccogliersi e fissarsi a guisa di nebulosa sotto ai nostri occhi per concederci le prime luci delle grandi applicazioni scientifiche, annunziatrici di più fulgidi albori.

Più allo scorcio di sua vita, nel 1908, presiedendo un'altra eletta raccolta di scienziati e di tecnici, ed esplorando con bella sintesi le vie veloci e magiche che i fenomeni elettrici fanno intravedere, il nobile Vecchio si chiedeva dove, quando verrà il messia, il Newton integratore di una nuova meccanica molto più complessa dell'attuale.

Anni o secoli? si domandava coll'ansia di un indefinito vaticinio ed incitava intanto al lavoro scientifico fervoroso come preparazione necessaria del nuovo mondo lontano.

Qui, in Roma, dove Goethe ha visto un mondo in verità; presso Monte Mario, dove il morto poeta della nuova coscienza d'Italia vide colla visione dell'anima le schiere radiose dei futuri trasmettersi la mistica face nel volo verso l'infinito, e sentì levarsi a nuovi numi gl'inni di un avvenire vivido di fulgori: qui, dico, sembrano più significative e più profonde le ansiose domande e le arcane visioni che tormentano e deliziano gli spiriti magni della scienza e dell'arte.

A preparare le vie della superiore cognizione umana invocata col fervido vaticinio, Maurizio Lévy — artiere di una nobilissima legione — diede il lavoro scientifico di cinquant'anni della sua vita mortale.

Il Presidente BLASERNA dà il triste annuncio della morte del Corrispondente prof. CESARE ARZELÀ, mancato ai vivi il 15 marzo 1912; apparteneva il defunto all'Accademia, per la Matematica, sino dal 15 luglio 1904.

Il Presidente BLASERNA comunica una lettera colla quale la Società Reale di Londra ringrazia l'Accademia dei Lincei per la parte da essa presa alle onoranze funebri tributate a Lord LISTER.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH, presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Soci TARAMELLI e NACCARI, e dai Corrispondenti FANTÒLI, LUSTIG, PASCAL e SILVESTRI; fa inoltre particolare menzione dei due volumi contenenti la Relazione del dott. DE FILIPPI, con annessi panorami e carte, sulla spedizione di S. A. R. il DUCA DEGLI ABRUZZI nel Karakoran.

Il Presidente BLASERNA presenta una raccolta degli scritti del Socio straniero prof. LIEBEN, il quale ne fa omaggio all'Accademia, e ne discorre.

E. M.
